หน่วยที่ 5

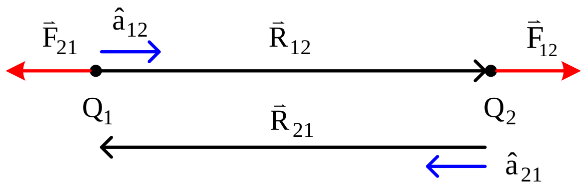
สนามไฟฟ้าสถิต

5.1 บทนำ

สนามไฟฟ้าสถิตเป็นสนามแบบเวกเตอร์ที่ไม่แปรตามเวลาเกิดจากประจุไฟฟ้าทั้งชนิดบวกและชนิดลบ การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าสถิต เริ่มจากกฎของคูลอมบ์ที่อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้นจากประจุสองประจุ กับระยะห่างของประจุทั้งสอง ถ้าสนใจอิทธิพลของแรงจากประจุตัวเดียว จะต้องให้ประจุอีกตัวนั้นเป็นประจุทดสอบซึ่งจะกำหนดให้ตัวมันมีค่าประจุน้อยกว่าประจุที่สนใจมากๆ และแรงที่ส่งจากประจุตัวหนึ่งไปยังประจุทดสอบจะถูกพิจารณาเป็นปริมาณใหม่ที่เรียกว่า ความเข้มสนามไฟฟ้า ซึ่งในระดับชั้นนี้จะศึกษาความเข้มสนามไฟฟ้าของประจุชนิดจุด ประจุชนิดเส้นและประจุชนิดแผ่น โดยมีเงื่อนไขว่าประจุชนิดเส้นกับประจุชนิดแผ่นนั้นจะต้องมีลักษณะทางกายภาพเฉพาะตัว ก่อเกิดสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเฉพาะตัวที่เรียกว่าสนามแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Fields) ต่อจากนั้นจะศึกษาถึงปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าและความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าซึ่งจะเกี่ยวเนื่องไปยังกฎของเกาส์ การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์ในการคำนวณหาประจุและความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า ในผิวลักษณะพิเศษที่เรียกว่าผิวของเกาส์ หัวข้อสุดท้ายสำหรับบทนี้จะศึกษางานและพลังงานจากการเคลื่อนประจุในสนามไฟฟ้าแบบสถิตที่ไม่แปรผันไปตามเวลา การคำนวณศักย์ไฟฟ้าซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ค่าอ้างอิงศักย์ศูนย์อยู่ที่อินฟินิตี้เท่านั้น

5.2 กฎของคูลอมบ์ (Coulomb’s law)

กฎนี้กล่าวว่า “ แรงระหว่างวัตถุขนาดเล็กสองก้อนซึ่งมีประจุไฟฟ้า และอยู่ห่างกันเป็นระยะทางที่ยาวกว่าขนาดความกว้างยาวของวัตถุทั้งสองมากๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประจุไฟฟ้าบนวัตถุทั้งสอง และเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสองนั้น” แรงดังกล่าวนี้จะกระทำในแนวเส้นตรงที่ลากเชื่อมต่อกับวัตถุทั้งสอง และเป็นแรงผลักเมื่อประจุทั้งสองเป็นประจุชนิดเดียวกัน (ประจุลบกับประจุลบ หรือประจุบวกกับประจุบวก) แต่จะเป็นแรงดูดเมื่อประจุทั้งสองเป็นประจุต่างชนิดกัน



รูปที่ 5.1 แสดงสาระสำคัญกฎของคูลอมบ์

พิจารณากฎของคูลอมบ์ และเขียนออกมาเป็นสูตร โดยใช้รูปที่ 5.1 ได้ดังนี้

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1Q_2}{R_{12}^2}\hat{a}_{12} \qquad (5.1)$$

โดยที่

$\vec{F}_{12}$ แรงที่กระทำต่อประจุ Q_2 โดยผลของประจุ Q_1

k เป็นค่าคงตัวเชิงสัดส่วน (Proportionality constant)

$\hat{a}_{12} = \dfrac{\vec{R}_{12}}{|\vec{R}_{12}|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวที่ลากจาก Q_1 ไปยัง Q_2

$R_{12} = |\vec{R}_{12}|$ เป็นระยะห่างระหว่าง Q_1 กับ Q_2

ในระบบหน่วยสากล (หน่วย SI) แรง $\vec{F}$ มีหน่วยเป็นนิวตัน (Newton ซึ่งเขียนย่อเป็น N) ประจุ Q_1 กับ Q_2 มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ (coulomb หรือเขียนย่อเป็น C) ระยะทาง $R_{12} = |\vec{R}_{12}|$ มีหน่วยเป็นเมตร (meter หรือ m) ส่วนค่าคงตัว k เป็นไปตามสมการ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \qquad (5.2)$$

เมื่อ ε เป็นค่าเพอร์มิททิวิตี (permittivity) ของตัวกลาง และมีหน่วยเป็น $C^2/N\cdot m^2$ หรือฟารัดต่อเมตร (F/m) ในอวกาศว่าง (free space) หรือในสุญญากาศ (vacuum) ค่าเพอร์มิททิวิตีจะมีค่าเป็น

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m} \tag{5.3}$$

ในตัวกลางอื่นๆ มีความสัมพันธ์ $\varepsilon = \varepsilon_R\varepsilon_0$ ปริมาณ ε_R ในที่นี้มีชื่อเรียกว่าเพอร์มิททิวิตีสัมพัทธ์ (relative permittivity) หรือค่าคงตัวไดอิเล็กตริก (dielectric constant) ของตัวกลาง เมื่อแทนค่า k จากสมการ (5.2) และใช้ $\varepsilon = \varepsilon_0$ ในสมการที่ (5.1) จะได้

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}^2}\hat{a}_{12} \tag{5.4}$$

พิจารณารูปที่ 5.1 แรงที่กระทำที่ประจุ Q_1 เนื่องจากประจุ Q_2 เป็น $\vec{F}_{21}$ ดังนี้

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{5.5}$$

และ

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{21}^2}\hat{a}_{21} \tag{5.6}$$

โดยที่ $R_{21} = R_{12}$ และ $\hat{a}_{21} = \dfrac{\vec{R}_{21}}{|\vec{R}_{21}|} = -\hat{a}_{12}$

ตัวอย่างที่ 5.1 ประจุชนิดจุด $Q_1 = 3\times10^{-4}$ C อยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(1,2,3)$ และประจุชนิดจุด $Q_2 = -10^{-4}$ C อยู่ที่ตำแหน่ง $P_2(2,0,5)$ ในสูญญากาศ จงหาแรงที่กระทำต่อประจุ Q_2 และ Q_1

<u>วิธีทำ</u>

หาแรงที่กระทำที่ประจุ Q_2

$$\vec{R}_{12} = (2-1)\hat{a}_x + (0-2)\hat{a}_y + (5-3)\hat{a}_x$$

$$= \hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

$$|\vec{R}_{12}| = \sqrt{(1)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\hat{a}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{|\vec{R}_{12}|} = \frac{\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}$$

ดังนั้น

$$\bar{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\hat{a}_{12}$$

$$\bar{F}_{12} = \frac{(3\times10^{-4})(-1\times10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)\times10^{-9}\times9}\left(\frac{\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}\right)$$

$$= -30\left(\frac{\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}\right)$$

$$= -10\hat{a}_x - 20\hat{a}_y + 20\hat{a}_z \qquad \text{N}$$

หาแรงที่กระทำที่ประจุ Q_1 ($\bar{F}_{21}$) จาก $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$ ดังนั้น

$$\bar{F}_{21} = 10\hat{a}_x + 20\hat{a}_y - 20\hat{a}_z \qquad \text{N}$$

<u>ตอบ</u> $-10\hat{a}_x - 20\hat{a}_y + 20\hat{a}_z$, $10\hat{a}_x + 20\hat{a}_y - 20\hat{a}_z$ N

5.3 ความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดจุด

ถ้าให้ Q_1 เป็นประจุที่อยู่กับที่ แล้วให้ Q_2 เป็นประจุทดสอบ โดยนิยามใหม่เป็น Q_t ซึ่งมีค่าสัมบูรณ์ของประจุน้อยกว่า Q_1 มากๆ เมื่อเคลื่อนประจุ Q_t ไปรอบๆ พบว่ามีแรงมากระทำที่ Q_t ทุกๆที่ กล่าวได้ว่าประจุ Q_t ได้แสดงการมี "สนามของแรง (force field)" เนื่องจาก Q_1 และแรงบน Q_t กำหนดได้ด้วยกฎของคูลอมบ์ดังนี้

$$\bar{F}_{1t} = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\hat{a}_{1t} \qquad \text{N/C} \qquad (5.7)$$

จากสมการที่ (5.7) แรงต่อประจุหนึ่งหน่วยเป็น

$$\frac{\bar{F}_{1t}}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\hat{a}_{1t} \qquad \text{N/C} \qquad (5.8)$$

จากสมการที่ (5.8) ปริมาณ $\frac{\bar{F}_{1t}}{Q_t}$ เรียกว่า "ความเข้มสนามไฟฟ้า" (Electric Field Intensity) ดังนั้น ความเข้มสนามไฟฟ้า จึงถูกนิยามว่าเป็น"แรงที่กระทำต่อประจุทดสอบต่อหน่วยประจุทดสอบนั้น" ใช้สัญญาลักษณ์ $\bar{E}$ ดังนี้

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}_{1t}}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\hat{a}_{1t} \quad \text{N/C หรือ Volts/meter (V/m)} \qquad (5.9)$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \qquad (5.10)$$

เมื่อ R คือขนาดของเวกเตอร์ $\bar{R}$ ซึ่งเป็นระยะทางจากจุดที่ประจุชนิดจุดอยู่ถึงจุดที่ต้องการหา$\bar{E}$

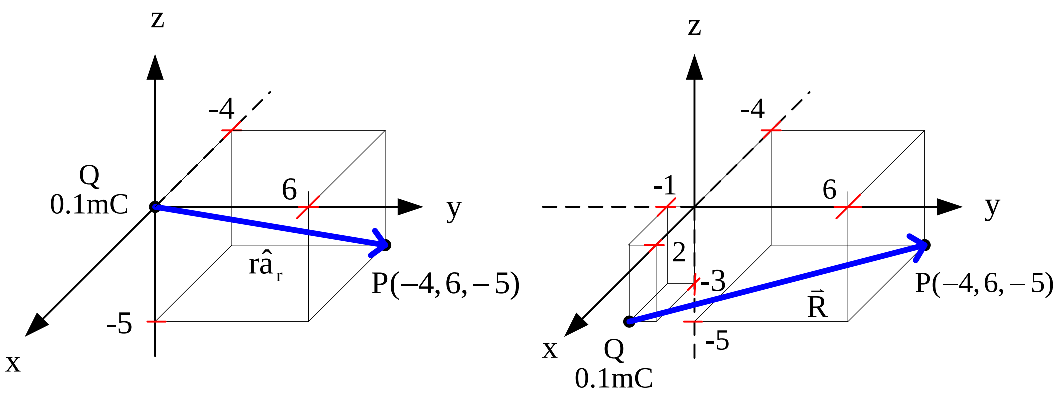
$\hat{a}_R$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\bar{R}$

ถ้าตำแหน่งของ Q_1 อยู่ที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดทรงกลม ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{a}_R$ จะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของรัศมี $\hat{a}_r$ และ R เป็น r ดังนั้น

$$\bar{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \qquad (5.11)$$

หรือ

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (5.12)$$



ก. ประจุอยู่ที่จุดกำเนิด

ข. ประจุอยู่ที่จุด (2, −1, −3)

รูปที่ 5.2 รูปสำหรับตัวอย่างที่ 5.2

ตัวอย่างที่ 5.2 หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(-4,6,-5)$ ในอวกาศว่าง เนื่องจากประจุชนิดจุดขนาด 0.1 mC อยู่ที่จุด

ก) จุดกำเนิด (นิยามด้วยพิกัดทรงกลม)

ข) จุด $(2,-1,-3)$ (นิยามด้วยพิกัดทรงเหลี่ยม)

ก) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(-4,6,-5)$ เนื่องจากประจุอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$

<u>**วิธีทำ**</u>

เมื่อความเข้มสนามไฟฟ้าถูกนิยามด้วยพิกัดทรงกลมและประจุอยู่ที่จุดกำเนิด จะได้

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

จากรูปที่ 5.2 ก. จุด $P(-4,6,-5)$ เมื่อระบุในพิกัดทรงกลมจะได้เป็น

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+6^2+(-5)^2}$$

$$= \sqrt{77}$$

$$\vec{E} = \frac{0.1\times10^{-3}}{(4\pi)(10^{-9}/36\pi)(77)}\hat{a}_r$$

$$= 11.67\hat{a}_r \quad \text{kV/m}$$

<u>**ตอบ**</u> $11.67\hat{a}_r$ kV/m

ข) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(-4,6,-5)$ เนื่องจากประจุอยู่ที่จุด $(2,-1,-3)$

<u>**วิธีทำ**</u>

เมื่อความเข้มสนามไฟฟ้าถูกนิยามด้วยพิกัดทรงเหลี่ยมและประจุไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด จะได้

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

จากรูปที่ 5.2 ข. จะได้

$$\vec{R} = (-4-2)\hat{a}_x + (6+1)\hat{a}_y + (-5+3)\hat{a}_z$$

$$= -6\hat{a}_x + 7\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$$

$$R = |\vec{R}|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{89}$$

และ

$$\hat{a}_R = \frac{-6\hat{a}_x + 7\hat{a}_y - 2\hat{a}_z}{\sqrt{89}}$$

$$= -0.64\hat{a}_x + 0.74\hat{a}_y - 0.21\hat{a}_z$$

ดังนั้น

$$\vec{E} = \frac{0.1\times10^{-3}}{(4\pi)(10^{-9}/36\pi)(\sqrt{89})^2}(-0.64\hat{a}_x + 0.74\hat{a}_y - 0.21\hat{a}_z)$$

$$= 10.11\times10^3(-0.64\hat{a}_x + 0.74\hat{a}_y - 0.21\hat{a}_z)$$

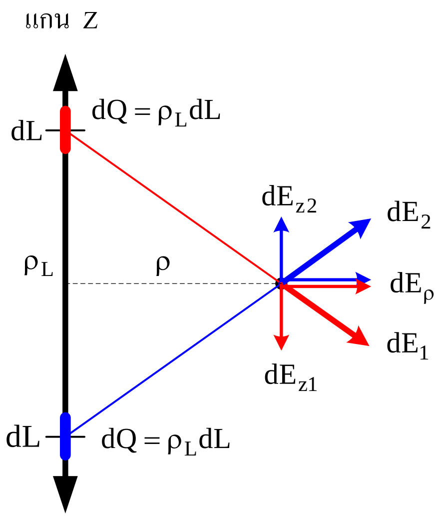
$$= -6.47\hat{a}_x + 7.48\hat{a}_y - 2.12\hat{a}_z \qquad \text{kV/m}$$

<u>ตอบ</u> $-6.47\hat{a}_x + 7.48\hat{a}_y - 2.12\hat{a}_z$ kV/m

---

5.4 ความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดเส้น

ประจุชนิดเส้นเป็นประจุที่มีความหนาแน่นตลอดทั่วทั้งเส้นเท่ากันหมด โดยเส้นประจุมีความยาวทางทฤษฎีเป็นอนันต์ (Infinity) วางตัวบนแกน Z มีความหนาแน่นประจุเท่ากันตลอดทั้งเส้นเป็น ρ_L ดังแสดงในรูปที่ 5.3 เมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าที่จุดห่างจากเส้นประจุในแนวตั้งฉากด้วยระยะ ρ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ที่เกิดจากประจุปริมาณเล็กๆด้านบนเป็น dE_1 ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวแกนรัศมี ρ คือ dE_ρ กับ dE_{z1} และเมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุปริมาณเล็กๆด้านล่างเป็น dE_2 ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวแกนรัศมี ρ คือ dE_ρ กับ dE_{z2} ถ้าพิจารณาความสมมาตรของสนามกล่าวคือ $|dE_{z1}| = |dE_{z2}|$ แต่ทิศทางตรงข้ามกัน จึงหักล้างกันเป็นศูนย์ ดังนั้นจะปรากฏเฉพาะสนามในแนวแกนรัศมี ρ คือ dE_ρ เท่านั้น



รูปที่ 5.3 แสดงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุชนิดเส้น

เมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าตลอดความยาวของเส้นลวดประจุจะได้สนามไฟฟ้าในแนวรัศมี ρ และมีลักษณะเป็นสนามรูปทรงกระบอก ดังนี้

$$\bar{E} \;=\; \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{a}_\rho \qquad (5.13)$$

เมื่อ $\bar{E}$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุชนิดเส้น

ρ_L เป็นความหนาแน่นของประจุชนิดเส้น

ε_0 เป็นค่าเพอร์มิทติวิตี (permittivity) ของอวกาศว่าง

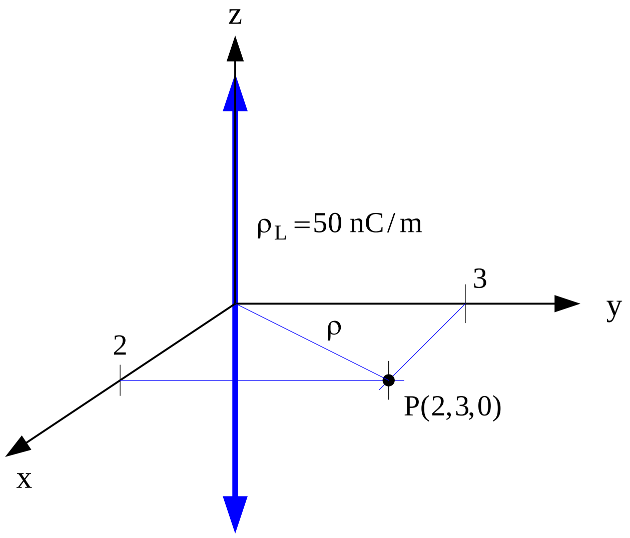
ρ เป็นระยะทางในแนวตั้งฉากกับเส้นประจุที่จุดพิจารณาสนามไฟฟ้า

$\hat{a}_\rho$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวรัศมี ρ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ตัวอย่างที่ 5.3 ประจุชนิดเส้นความยาวเป็นอนันต์มีความหนาแน่นประจุเป็น $\rho_L = 50 \text{ nC/m}$ ตลอดทั้งเส้น วางตัวอยู่บนแกน z ในอวกาศว่างดังแสดงในรูปที่ 5.4 ให้หาสนามไฟฟ้าที่จุด $P(2,3,0)$ ในระบบพิกัด

ก) ทรงเหลี่ยม

ข) ทรงกระบอก



รูปที่ 5.4 แสดงตำแหน่งของเส้นลวดตัวนำและพิกัดจุดP สำหรับตัวอย่างที่ 5.3

ก) หาสนามไฟฟ้าที่จุด $P(2,3,0)$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

<u>วิธีทำ</u> หา ρ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{13} \qquad \text{m}$$

$$\hat{a}_\rho = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$\hat{a}_\rho = \frac{2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y}{\sqrt{13}}$$

แทนค่า ρ และ $\hat{a}_\rho$ ลงในสมการ

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{a}_\rho$$

$$= \frac{50\times 10^{-9}}{(2\pi)(10^{-9}/36\pi)(\sqrt{13})}\frac{2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y}{\sqrt{13}}$$

$$= 138.46\hat{a}_x + 207.69\hat{a}_y \qquad \text{V/m}$$

<u>ตอบ</u> $138.46\hat{a}_x + 207.69\hat{a}_y$ V/m

ข) หาสนามไฟฟ้าที่จุด $P(2,3,0)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u>

จากข้อ ก. $\rho = \sqrt{13}$ ดังนั้น

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{a}_\rho$$

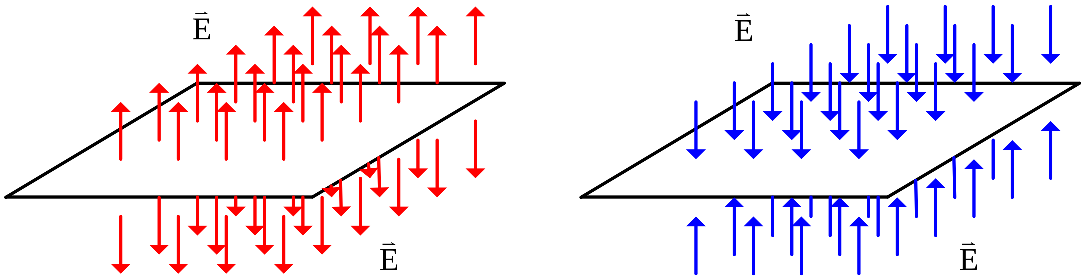
$$= \frac{50\times 10^{-9}}{(2\pi)(10^{-9}/36\pi)\sqrt{13}}\hat{a}_\rho$$

$$= 249.61\hat{a}_\rho \qquad \text{V/m}$$

<u>ตอบ</u> $249.61\hat{a}_r$ V/m

5.5 ความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดแผ่น

ประจุชนิดแผ่นในที่นี้จะถูกกำหนดว่าเป็นประจุบวกหรือลบที่กระจายตัวเป็นแผ่นแบบผิว มีขนาดกว้างยาวเป็นอนันต์ มีความหนาแน่นของประจุเท่ากันหมดตลอดพื้นผิวประจุ สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากประจุชนิดแผ่นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอตั้งฉากกับแผ่นประจุ โดยมีทิศทางขึ้นกับชนิดของประจุ (ประจุบวกหรือประจุลบ) ดังแสดงในรูปที่ 5.5



ก. ประจุชนิดบวก ข. ประจุชนิดลบ

รูปที่ 5.5 ลักษณะของสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดแผ่น

สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุชนิดแผ่นมีขนาดกว้างยาวเป็นอนันต์ เขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\vec{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\hat{a}_N \tag{5.14}$$

เมื่อ $\vec{E}$ เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุชนิดแผ่น

ρ_S เป็นความหนาแน่นของประจุเชิงแผ่น

$\hat{a}_N$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางตั้งฉากกับแผ่นประจุ

ε_0 เป็นค่าเพอร์มิทติวิตี (permittivity) ของอวกาศว่าง

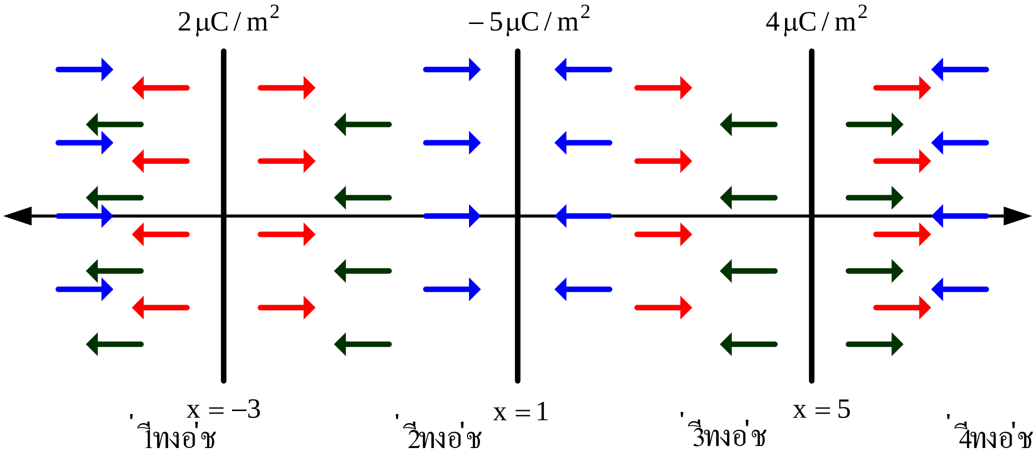
ตัวอย่างที่ 5.4 ประจุชนิดแผ่นแบบผิวขนาดกว้างยาวเป็นอนันต์ 3 แผ่นวางอยู่ในอวกาศว่างดังนี้ แผ่นที่หนึ่ง ความหนาแน่นประจุ $2\ \mu C/m^2$ วางอยู่ที่ $x = -3$ แผ่นที่สองความหนาแน่นประจุ $-5\ \mu C/m^2$ วางอยู่ที่ $x = 1$ และแผ่นที่สาม ความหนาแน่นประจุ $4\ \mu C/m^2$ วางอยู่ที่ $x = 5$ ดังแสดงในรูปที่ 5.6 ให้หา $\vec{E}$ ที่จุด

ก) $(0, 0, 0)$

ข) $(2.5, -1.6, 4.7)$

ค) $(8, -2, -5)$

ง) $(-3.1, 0, 3.1)$



รูปที่ 5.6 แสดงตำแหน่งของแผ่นประจุสำหรับตัวอย่างที่ 5.4

<u>วิธีทำ</u>

ก) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $(0,0,0)$

ที่จุด $(0,0,0)$ คือจุดที่มี $x = 0$ จะอยู่ในช่องที่ 2 ในรูปที่ 5.6 จะมีสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุชนิดแผ่นทั้งสามดังนี้

แผ่นที่ 1 $(2\ \mu C/m^2)$ ลูกศรเส้นสีแดง

$$\vec{E}_1 = \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 2 $(-5\ \mu C/m^2)$ ลูกศรเส้นสีน้ำเงิน

$$\vec{E}_2 = \frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 3 $(4\ \mu C/m^2)$ ลูกศรเส้นสีดำ

$$\vec{E}_3 = -\frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่เกิดขึ้นที่จุด $(0,0,0)$ คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

$$= \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x + \frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x - \frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$\vec{E} = \frac{3\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$= \frac{3\times10^{-6}}{(2)(8.854\times10^{-12})}\hat{a}_x$$

$$= 169.41\hat{a}_x \quad \text{kV/m}$$

ตอบ $169.41\hat{a}_x$ kV/m

ข) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $(2.5,-1.6,4.7)$

ที่จุด $(2.5,-1.6,4.7)$ คือจุดที่มี x = 2.5 จะอยู่ในช่องที่ 3 ในรูปที่ 5.6 จะมีสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุชนิดแผ่นทั้งสามดังนี้

แผ่นที่ 1 ($2\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีแดง

$$\vec{E}_1 = \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 2 ($-5\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีน้ำเงิน

$$\vec{E}_2 = -\frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 3 ($4\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีดำ

$$\vec{E}_3 = -\frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่เกิดขึ้นที่จุด $(2.5,-1.6,4.7)$ คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

$$= \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x - \frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x - \frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$= -\frac{7\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$= -\frac{7\times10^{-6}}{(2)(8.854\times10^{-12})}\hat{a}_x$$

$$= -395.30\,\hat{a}_x \quad \text{kV/m}$$

ตอบ $-395.30\,\hat{a}_x$ kV/m

ค) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $(8,-2,-5)$

ที่จุด $(8,-2,-5)$ คือจุดที่มี x = 8 จะอยู่ในช่องที่ 4 ในรูปที่ 5.6 จะมีสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุชนิดแผ่นทั้งสามดังนี้

แผ่นที่ 1 ($2\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีแดง

$$\bar{E}_1 = \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 2 ($-5\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีน้ำเงิน

$$\bar{E}_2 = -\frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 3 ($4\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีดำ

$$\bar{E}_3 = \frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่เกิดขึ้นที่จุด $(8,-2,-5)$ คือ

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3 \\
&= \frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x-\frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x+\frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x \\
&= \frac{1\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x \\
&= \frac{1\times10^{-6}}{(2)(8.854\times10^{-12})}\hat{a}_x \\
&= 56.47\,\hat{a}_x \quad \text{kV/m}
\end{aligned}$$

ตอบ $56.47\,\hat{a}_x$ kV/m

ง) หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $(-3.1, 0, 3.1)$

ที่จุด $(-3.1, 0, 3.1)$ คือจุดที่มี $x = -3.1$ จะอยู่ในช่องที่ 1 ในรูปที่ 5.6 จะมีสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุชนิดแผ่นทั้งสามดังนี้

แผ่นที่ 1 ($2\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีแดง

$$\vec{E}_1 = -\frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 2 ($-5\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีน้ำเงิน

$$\vec{E}_2 = \frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

แผ่นที่ 3 ($4\ \mu C/m^2$) ลูกศรเส้นสีดำ

$$\vec{E}_3 = -\frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่เกิดขึ้นที่จุด $(-3.1, 0, 3.1)$ คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$= -\frac{2\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x + \frac{5\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x - \frac{4\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$= -\frac{1\times10^{-6}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

$$= -\frac{1\times10^{-6}}{(2)(8.854\times10^{-12})}\hat{a}_x$$

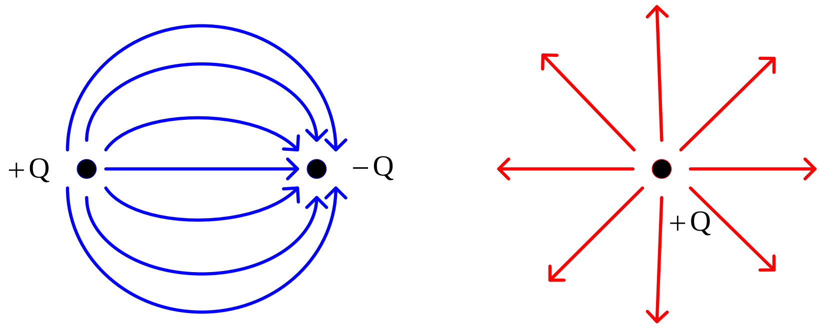
$$= -56.47\hat{a}_x \quad \text{kV/m}$$

<u>ตอบ</u> $-56.47\hat{a}_x$ kV/m

5.6 ฟลักซ์ไฟฟ้าและความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า

ด้วยการนิยาม ฟลักซ์ไฟฟ้า Ψ (Electric flux) จะเกิดขึ้นที่ประจุบวกและไปสิ้นสุดที่ประจุลบ ถ้าไม่ปรากฏประจุลบอยู่บริเวณนั้น ฟลักซ์ไฟฟ้าจะไปสิ้นสุดที่อนันต์ (รูปที่ 5.7) และนิยามต่ออีกว่า ประจุไฟฟ้าหนึ่งคูลอมบ์จะก่อให้เกิดฟลักซ์ไฟฟ้าขนาดหนึ่งคูลอมบ์เสมอ นั่นคือ

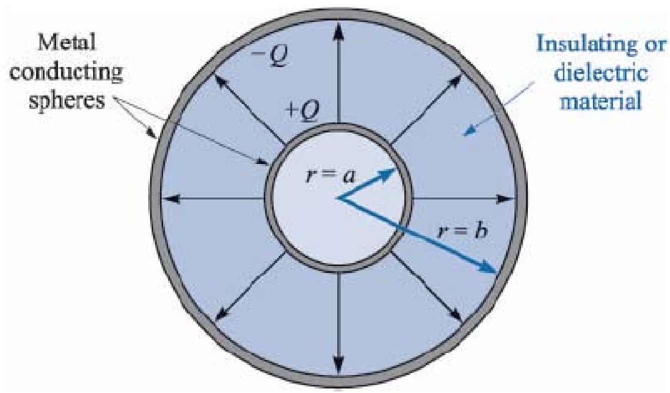
$$\Psi = Q \qquad \text{Coulomb} \qquad (5.15)$$



(ก) (ข)

รูปที่ 5.7 แสดงฟลักซ์ไฟฟ้า (ก) เมื่อมีประจุบวกและประจุลบที่มีขนาดเท่ากัน
(ข) เมื่อมีประจุบวกอย่างเดียว

รูปที่ 5.7 (ก) จะสมมุติให้ประจุทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ฟลักซ์ไฟฟ้า Ψ ถูกพิจารณาเป็นปริมาณสเกลาร์ ในขณะที่ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า $\bar{D}$ จะพิจารณาเป็นสนามเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางตามเส้นฟลักซ์ รูปที่5.7 (ข) แสดงเส้นฟลักซ์ไฟฟ้าเมื่อประจุลบอยู่ที่อนันต์



รูปที่ 5.8 โลหะทรงกลมสองชั้น

ที่มา : William H. Hayt, JR., Engineering Electromagnetics, Fourth edition, McGraw-hill International Edition

รูปที่ 5.8 โลหะทรงกลมสองชั้นประกบกันโดยมีฉนวนกั้นกลางระหว่างชั้นในและชั้นนอก ชั้นในมีประจุ $+Q$ ชั้นนอกมีประจุ $-Q$ กระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอ ทรงกลมชั้นในมีรัศมีเป็น a ชั้นนอกมีรัศมีเป็น b ฟลักซ์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นแสดงด้วยเส้นตรงที่ชี้จากโลหะทรงกลมชั้นในไปยังโลหะทรงกลมชั้นนอก พิจารณาที่ผิวโลหะทรงกลมชั้นในจะมีฟลักซ์ไฟฟ้า Ψ คูลอมบ์ ที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุ $+Q$ กระจายเต็มพื้นที่ผิวขนาด $4\pi a^2$ ตารางเมตร ดังนั้นจะได้ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าเป็น

$$\vec{D}_a = \frac{Q}{4\pi a^2}\hat{a}_r \text{ (โลหะทรงกลมชั้นใน)} \qquad (5.15)$$

ทำนองเดียวกันที่โลหะทรงกลมชั้นนอกจะได้ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าเป็น

$$\vec{D}_b = \frac{Q}{4\pi b^2}\hat{a}_r \text{ (โลหะทรงกลมชั้นนอก)} \qquad (5.16)$$

สำหรับบริเวณที่อยู่ระหว่างโลหะทรงกลมชั้นในและชั้นนอก ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าเป็น

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \qquad (5.17)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุ Q ในอวกาศว่างซึ่งขอยกมากล่าวอีกครั้งในที่นี้เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบคือ

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \qquad (5.18)$$

จากสมการที่ (5.17) และ (5.18) จะได้

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \qquad (5.19)$$

ตัวอย่างที่ 5.5 คำนวณหาความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า $\vec{D}$ ที่จุดในแนวเส้นรอบวงรัศมี 3 เมตร ที่มีแกน z เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมีประจุชนิดเส้นยาวเป็นอนันต์(Uniform line charge) ความหนาแน่นของประจุเป็น 8 nC/m วางตัวบนแกน z ในอวกาศว่าง

<u>**วิธีทำ**</u> ความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดเส้นคือ

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{a}_\rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\hat{a}_\rho$$

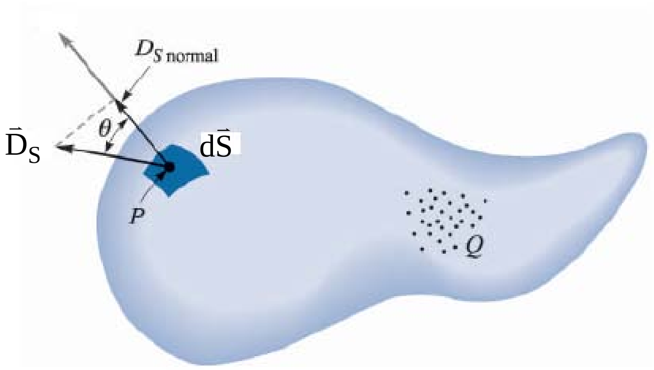
$$= \frac{8\times10^{-9}}{(2\pi)(3)}\hat{a}_\rho$$

$$= 0.424\hat{a}_\rho \qquad \text{nC/m}$$

ตอบ $0.424\hat{a}_\rho$ nC/m

5.7 กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

กฎของเกาส์กล่าวว่า "ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ทะลุผ่านผิวปิดใดๆ มีค่าเท่ากับประจุไฟฟ้ารวมทั้งหมดที่ถูกปิดล้อมด้วยผิวปิดนั้น"



รูปที่ 5.9 แสดงความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าบนผิวปิดที่มีประจุอยู่ภายใน

รูปที่ 5.9 ผิวปิดหนึ่งปิดล้อมประจุ Q อยู่ภายใน จากกฎของเกาส์สามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\Psi = \oint_S \vec{D}_S \cdot d\vec{S} = Q_{encls} \qquad (5.20)$$

เมื่อ

Ψ คือปริมาณฟลักซ์ไฟฟ้าที่ทะลุผ่านผิวปิด

$\vec{D}_S$ คือความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าที่บริเวณพื้นผิวของผิวปิด

$d\vec{S}$ คือพื้นที่ผิวแบบดิฟเฟอเรนเชียล

Q_{encls} คือประจุรวมทั้งหมดที่ถูกปิดล้อมด้วยผิวปิด

เทอม $\oint_s \bar{D}_S \cdot d\bar{S}$ ในสมการที่ (5.20) หมายถึงปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้ารวมทั้งหมดที่ทะลุผ่านผิวปิดตลอดทั่วทั้งผิวปิด

จากสมการที่ (5.20) ถ้าประจุภายในผิวปิดมีค่าความหนาแน่นของประจุเป็น ρ_v จะได้

$$\Psi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_v \rho_v dv \qquad (5.21)$$

เมื่อเทอม $\int_v \rho_v dv$ คือประจุรวมทั้งหมดที่ถูกปิดล้อมด้วยผิวปิด

5.8 ผิวแบบเกาส์ชนิดพิเศษ (Special Gaussian Surface)

ผิวแบบเกาส์ชนิดพิเศษเป็นผิวจินตนาการขึ้นมาเพื่อให้การคำนวณสมการที่(5.20) เป็นไปได้ง่ายขึ้น ผิวดังกล่าวจะต้องมีคุณสมบัติพิเศษดังนี้

1. เป็นผิวแบบปิด
2. $\bar{D}_S$ ที่จุดใดๆบนผิวนี้มีทิศทางตั้งฉากหรือไม่ก็สัมผัสกับผิวนี้เท่านั้น
3. ในจุดที่ $\bar{D}_S$ ตั้งฉากกับผิว $\bar{D}_S$ จะต้องมีค่าเท่ากันตลอดทั่วทั้งผิว

ตัวอย่างที่ 5.5 ประจุชนิดจุดขนาด 100 mC วางอยู่ที่จุดกำเนิด จงหาปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านส่วนของผิวที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยต่อไปนี้

ก. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2$

ข. $0 \le \theta \le \pi/4,\ \pi/5 \le \phi \le \pi/2$

<u>**วิธีทำ**</u>

ที่ผิวส่วนของทรงกลมรัศมี 1 หน่วย มีความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า $\bar{D}_S$ เป็น

$$\begin{aligned} \bar{D}_S &= \varepsilon_0 \bar{E} \\ &= \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \\ &= \frac{100}{4\pi}\hat{a}_r \qquad \text{mC}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

พื้นที่ผิวแบบดิฟเฟอเรนเชี่ยลในพิกัดทรงกลม $d\bar{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r$ ดังนั้นฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่ผิวจึงเป็น

$$\Psi = \int_s \bar{D}_S \cdot d\bar{S}$$

$$= \int_s \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r$$

$$= \int_s \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

ก. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2$

$$\Psi = \frac{100}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= (100/4\pi)(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2})(\phi\Big|_0^{\pi/2})$$

$$= (100/4\pi)[-\cos(\pi/2) + \cos 0][(\pi/2) - 0]$$

$$= (100/4\pi)(\pi/2)$$

$$= \frac{100}{8} \quad \text{mC}$$

<u>ตอบ</u> $\frac{100}{8}$ mC

ข. $0 \le \theta \le \pi/4,\ \pi/5 \le \phi \le \pi/2$

$$\Psi = \frac{100}{4\pi} \int_{\phi=\pi/5}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= (100/4\pi)(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/4})(\phi\Big|_{\pi/5}^{\pi/2})$$

$$= (100/4\pi)[-\cos(\pi/4) + \cos 0][\pi/2 - \pi/5]$$

$$= (100/4\pi)[-\cos(\pi/4) + 1][0.3\pi]$$

$$= (100/4\pi)[0.293][0.3\pi]$$

$$= 2.197 \quad \text{mC}$$

<u>ตอบ</u> 2.197 mC

ตัวอย่างที่ 5.6 จากประจุในตัวอย่างที่ 5.5 ให้ใช้ผิวแบบเกาส์ชนิดพิเศษพิสูจน์สมการที่(5.20)

วิธีทำ

วิเคราะห์ผิวของเกาส์

ประจุชนิดจุดมีความเข้มสนามไฟฟ้าเป็น $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$ และมีความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าเป็น $\vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r$ ซึ่งมีทิศทางสนามในแนวรัศมี r และค่า $\vec{D}$ ขึ้นอยู่กับระยะรัศมีเท่านั้น ดังนั้นผิวแบบเกาส์ที่เหมาะสมในที่นี้คือผิวทรงกลมที่มีรัศมีค่าหนึ่ง เนื่องจากทุกๆ จุดบนผิวปิดทิศทางของ $\vec{D}$ จะตั้งฉากกับผิวเสมอ

จากสมการที่ (5.20) จะหาฟลักซ์รวมทั้งหมดที่พุ่งออกจากผิวปิดทรงกลมรัศมีคงที่ค่าหนึ่งและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดได้ดังนี้

$$\Psi = \oint_s \vec{D}_S \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_s \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{100}{4\pi}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\phi\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{100}{4\pi}(-\cos\pi + \cos 0)(2\pi - 0)$$

$$= \frac{100}{4\pi}(4\pi)$$

$$= 100 \qquad \text{mC}$$

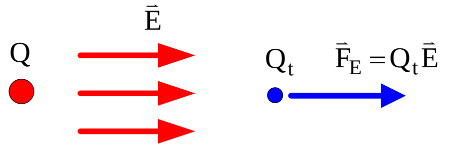
จากคำตอบที่ได้ปริมาณฟลักซ์ไฟฟ้ารวมทั้งหมดที่พุ่งออกจากผิวปิดทรงกลมจะมีค่าเท่ากับ100 mC ซึ่งเท่ากับประจุรวมทั้งหมดที่อยู่ในผิวปิดนี้ เป็นจริงตามที่กล่าวในสมการที่(5.20)

5.9 พลังงานไฟฟ้า

พลังงานไฟฟ้าเกิดจากการเคลื่อนย้ายประจุทดสอบหนึ่งหน่วยในสนามไฟฟ้า ถ้าย้ายประจุทดสอบชนิดจุดผ่านสนามไฟฟ้าในทิศทางตรงข้ามกับสนามไฟฟ้าจะต้องใช้แรงเท่ากันกับแรงของสนามไฟฟ้านั้น แต่มีทิศทางตรงข้ามกับสนามไฟฟ้า พลังงานไฟฟ้าหรืองานที่ทำจะเป็นบวก และถ้าต้องการเคลื่อนย้ายประจุไปในทิศทางเดียวกับสนามไฟฟ้าพลังงานที่เกิดขึ้นจะเป็นลบ

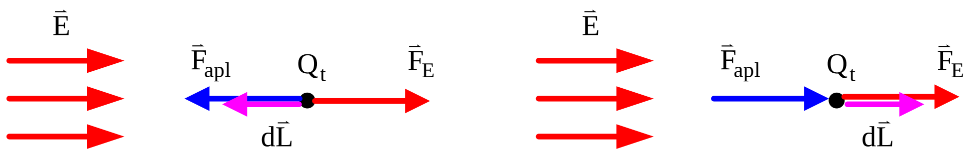
รูปที่ 5.10 แสดงประจุชนิดจุดขนาด Q คูลอมบ์ ซึ่งเป็นแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ประจุทดสอบขนาด Q_t คูลอมบ์ วางอยู่ในสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ จึงเกิดแรงที่กระทำกับประจุทดสอบนี้เป็น $\vec{F}_E$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\vec{F}_E = Q_t\vec{E} \quad \text{นิวตัน} \qquad (\mathrm{N}) \qquad (5.22)$$



รูปที่ 5.10 แรงที่กระทำกับประจุทดสอบ Q_t เนื่องจากสนามไฟฟ้า $\vec{E}$

ถ้ามีการเคลื่อนย้ายประจุในสนามไฟฟ้าซึ่งแสดงด้วยรูปที่ 5.11 ทำให้ได้งานหรือพลังงานตามที่กล่าวข้างต้น และงานที่ได้จะเป็นผลคูณระหว่างแรงที่ใช้ F_{apl} กับระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ dL รูปที่ 5.11 (ก) และ (ข) แสดงให้เห็นถึงสภาวะการเกิดงานหรือพลังงานทั้งสองกรณีคือ เมื่อเคลื่อนประจุ Q_t ไปในทิศทางตรงข้ามกับสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ จะได้งานเป็นบวก และเมื่อเคลื่อนประจุไปในทิศทางเดียวกันกับสนามไฟฟ้าจะได้งานเป็นลบ



(ก) งานหรือพลังงานที่ได้เป็นบวก (ข) งานหรือพลังงานที่ได้เป็นลบ

รูปที่ 5.11 แสดงงานที่ได้จากการเคลื่อนประจุในทิศทางตรงข้ามและทิศทางเดียวกับสนามไฟฟ้า

เมื่อคำนวณงานที่เกิดขึ้นจะได้ดังนี้

$$dW = F_{apl}dL \quad \text{จูล} \qquad (J) \qquad (5.23)$$

ถ้าพิจารณางานที่ได้ (dW) จากแรงเนื่องจากสนามไฟฟ้า (F_E) กับระยะทางที่ประจุเคลื่อนที่ได้ (dL) จะได้ดังนี้

รูปที่ 5.11 (ก)

$$dW = F_E dL \qquad (5.24)$$

รูปที่ 5.11 (ข)

$$dW = -F_E dL \qquad (5.25)$$

หรือแสดงในรูปของปริมาณเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$dW = -\vec{F}_E \cdot d\vec{L} \qquad (5.26)$$

จากสมการที่ 5.22 จะได้

$$dW = -Q_t \vec{E} \cdot d\vec{L} \qquad J \qquad (5.27)$$

เมื่อ

dW คืองานหรือพลังงานที่ได้จากการเคลื่อนประจุเป็นระยะทาง dL

$\vec{E}$ คือความเข้มสนามไฟฟ้า

$d\vec{L}$ คือระยะกระจัด (vector displacement) ที่ประจุเคลื่อนที่ได้

Q_t คือประจุทดสอบ

ในระบบพิกัดต่างๆ $d\vec{L}$ เป็นดังนี้

$$d\vec{L} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \qquad \text{(ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม)} \qquad (5.28)$$

$$d\vec{L} = d\rho\hat{a}_\rho + \rho d\phi\hat{a}_\phi + dz\hat{a}_z \qquad \text{(ระบบพิกัดทรงกระบอก)} \qquad (5.29)$$

$$d\vec{L} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi \qquad \text{(ระบบพิกัดทรงกลม)} \qquad (5.30)$$

ดังนั้นงานหรือพลังงานที่เกิดขึ้นรวมทั้งหมดจากการเคลื่อนย้ายประจุ Q_t จากจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าเป็น

$$W_{AB} = -Q_t\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} \qquad J \qquad (5.31)$$

ในรูปทั่วไปเมื่อเคลื่อนย้ายประจุ Q จากจุดเริ่มต้น (init) ไปยังจุดปลาย (fin) ผ่านสนามไฟฟ้า $\bar{E}$

$$W = -Q\int_{init}^{fin} \bar{E}\cdot d\bar{L} \qquad J \qquad (5.32)$$

ตัวอย่างที่ 5.7 กำหนดสนามไฟฟ้า $\bar{E} = 3x^2\hat{a}_x + 2z\hat{a}_y + 2y\hat{a}_z$ V/m ให้หางานที่ทำในการเคลื่อนย้ายประจุทดสอบขนาด 20 μC ไปตามเส้นทางสั้นๆด้วยระยะ 10^{-4} m ในทิศทาง $-0.6\hat{a}_x + 0.48\hat{a}_y - 0.64\hat{a}_z$ เมื่อประจุวางอยู่ที่

ก. จุดกำเนิด

ข. $(2,-2,-5)$

ก. จุดกำเนิด

<u>**วิธีทำ**</u>

ประจุวางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ ซึ่งค่าสนามไฟฟ้าเป็น

$$\bar{E} = 0$$

ดังนั้น

$$dW = -Q_t\bar{E}\cdot d\bar{L} = 0 \qquad J$$

<u>**ตอบ**</u> 0 J

ข. $(2,-2,-5)$

<u>**วิธีทำ**</u>

ประจุวางอยู่ที่จุด $(2,-2,-5)$ ซึ่งค่าสนามไฟฟ้าเป็น

$$\bar{E} = 3x^2\hat{a}_x + 2z\hat{a}_y + 2y\hat{a}_z$$

$$= 3(2)^2\hat{a}_x + 2(-5)\hat{a}_y + 2(-2)\hat{a}_z$$

$$= 12\hat{a}_x - 10\hat{a}_y - 4y\hat{a}_z \qquad V/m$$

$$d\bar{L} = 10^{-4}(-0.6\hat{a}_x + 0.48\hat{a}_y - 0.64\hat{a}_z) \qquad m$$

ดังนั้น

$$dW = -Q_t\bar{E}\cdot d\bar{L}$$

$$dW = -10^{-4}(20\times10^{-6})(12\hat{a}_x - 10\hat{a}_y - 4y\hat{a}_z)\cdot(-0.6\hat{a}_x + 0.48\hat{a}_y - 0.64\hat{a}_z)$$

$$dW = -2\times 10^{-9}(-7.2-4.8+2.56)$$

$$= 18.88\times 10^{-9}$$

$$= 18.88 \quad \text{nJ}$$

<u>ตอบ</u> 18.88 nJ

ตัวอย่างที่ 5.8 คำนวณหางานที่ทำในการเคลื่อนย้ายประจุขนาด $0.3\,C$ จากจุด $(2,0,0)$ ไปยังจุด $(0,2,0)$ ในแนวเส้นตรง ผ่านสนามไฟฟ้า $\vec{E} = 6x^2\hat{a}_x + 6y\hat{a}_y + \hat{a}_z$ V/m

<u>วิธีทำ</u>

กำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ของประจุ $d\vec{L}$ ในที่นี้เป็นเส้นตรงในระนาบx-y ที่ z =0 ดังนั้นการเคลื่อนที่ของประจุจะถูกกำหนดด้วยสมการเส้นตรงดังนี้

$$y = mx + c$$

โดยที่ m คือค่าความชัน

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-2} = -1$$

C คือจุดตัดแกน y ซึ่งในที่นี้คือที่ $y = 2$

ดังนั้นจะได้

$$y = -x + 2$$

และ

$$dy = -dx$$

$$dz = 0$$

จาก $W_{AB} = -Q_t\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{L}$ ดังนั้นย้ายประจุขนาด $0.3\,C$ จากจุด $(2,0,0)$ ไปยังจุด $(0,2,0)$ จะหาได้จาก

$$W = -0.3\int_{(2,0,0)}^{(0,2,0)} (6x^2\hat{a}_x + 6y\hat{a}_y + \hat{a}_z)\cdot d\vec{L}$$

$$W = -0.3\int_{(2,0,0)}^{(0,2,0)} (6x^2\hat{a}_x + 6y\hat{a}_y + \hat{a}_z)\cdot(dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z)$$

$$W = -0.3\int_{(2,0,0)}^{(0,2,0)}(6x^2dx+6ydy+dz)$$

แทนค่า $dy = -dx$, $dz = 0$ และ $y = -x+2$

$$W = -0.3\int_2^0 [6x^2dx-6(-x+2)dx]$$

$$= -0.3\int_2^0 (6x^2+6x-12)dx$$

$$= -0.3\left(\int_2^0 6x^2dx+\int_2^0 6xdx-\int_2^0 12dx\right)$$

$$= -1.8\left(\int_2^0 x^2dx+\int_2^0 xdx-\int_2^0 2dx\right)$$

$$= -18\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^0+\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^0-2x\Big|_2^0\right)$$

$$= 6(8)+9(4)-36(2)$$

$$= 12 \quad \text{J}$$

ตอบ 12 J

5.10 ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์ไฟฟ้า

นิยาม ความต่างศักย์ไฟฟ้าเป็นงานที่ทำในการเคลื่อนย้ายประจุบวกขนาดหนึ่งหน่วยจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในสนามไฟฟ้า นั่นคือ

$$V = -\int_{init}^{final}\bar{E}\cdot d\bar{L} \quad \text{โวลท์} \tag{5.33}$$

เมื่อ

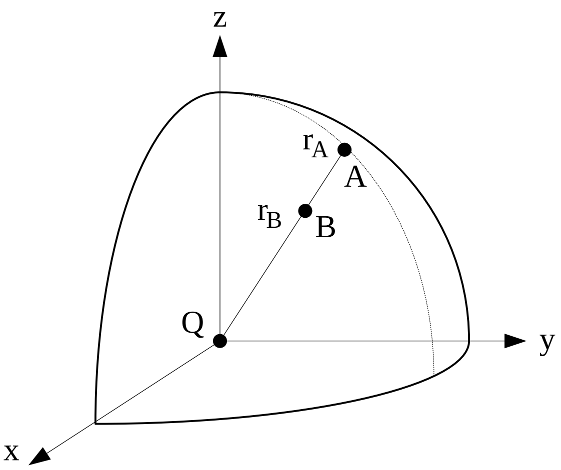
V คือความต่างศักย์ไฟฟ้า

$\bar{E}$ คือความเข้มสนามไฟฟ้า

$d\bar{L}$ คือเส้นทางการเคลื่อนที่ของประจุ

init คือจุดเริ่มต้นการเคลื่อนที่

final คือจุดสิ้นสุดการเคลื่อนที่



รูปที่ 5.12 จุด A และจุด B อยู่ที่ตำแหน่งในแนวรัศมี r ของทรงกลม มีประจุ Q อยู่ที่จุดกำเนิด

พิจารณาความต่างศักย์ไฟฟ้าที่จุดสองจุดในแนวรัศมี r ในสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ที่เกิดเนื่องจากประจุชนิดจุดขนาด Q คูลอมบ์ โดยประจุนี้วางอยู่ที่จุดกำเนิด (รูปที่ 5.12) จุด A และจุด B อยู่บนแนวรัศมีของทรงกลมด้วยระยะความยาวเป็น r_A และ r_B ตามลำดับ

สนามไฟฟ้าจากประจุชนิดจุดที่วางที่จุดกำเนิด

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

และ

$$d\vec{L} = dr\hat{a}_r$$

จะได้ความต่างศักย์ที่จุด A เทียบกับจุด B ดังนี้

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\int_{r_B}^{r_A}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) \qquad (5.34)$$

ถ้า $r_B >> r_A$ ความต่างศักย์ไฟฟ้า V_{AB} จะเป็นปริมาณบวก แสดงถึงการใช้พลังงานจากแหล่งจ่ายภายนอกในการนำประจุชนิดบวกจาก r_B ไปยัง r_A และถ้า r_B มีค่ามากๆ เมื่อพิจารณาทางทฤษฎีถือเป็นอนันต์ (Infinity) และที่จุดอนันต์นี้มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์ (และใช้เป็นจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์) จะได้ศักย์ไฟฟ้าที่จุด A เมื่อเทียบกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์เป็น

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \qquad (5.35)$$

จากสมการที่ (5.34) เมื่อนำมาพิจารณาร่วมกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์ที่จุดอนันต์ กล่าวคือจุด A เทียบกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์ จุด B เทียบกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์ จะได้

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

หรือ

$$V_{AB} = V_A - V_B \qquad (5.36)$$

เมื่อ

V_A เป็นศักย์ไฟฟ้าที่จุด A เทียบกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์ที่จุดอนันต์

V_B เป็นศักย์ไฟฟ้าที่จุด B เทียบกับจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์ที่จุดอนันต์

ตัวอย่างที่ 5.9 ประจุชนิดจุดขนาด 1.6 nC วางอยู่ที่จุดกำเนิดในอวกาศว่าง ให้หาศักย์ไฟฟ้าที่ r = 0.7 m เมื่อจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์อยู่ที่อนันต์

<u>วิธีทำ</u>

ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าจากประจุชนิดจุดเมื่อวางที่จุดกำเนิด

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

ในที่นี้ $r_A = 0.7$ m ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าที่ r = 0.7 m คำนวณได้ดังนี้

$$V = \frac{1.6\times10^{-9}}{(4\pi\varepsilon_0)(0.7)}$$

$$= \frac{1.6\times10^{-9}}{(4\pi)(10^{-9}/36\pi)(0.7)}$$

$$= 20.57 \text{ โวลท์}$$

<u>ตอบ</u> 20.57 โวลท์

☺☺☺☺☺

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 5

1. กฎของคูลอมบ์กล่าวว่าอย่างไร
2. จงเขียนสูตรการหาแรงระหว่างประจุสองประจุ
3. จงเขียนสูตรการหาความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดจุดที่วางอยู่ที่จุดกำเนิด
4. จงเขียนสูตรการหาความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุชนิดจุดที่วางอยู่ที่จุดใด ๆ
5. ประจุชนิดจุด $Q_1 = 2\times10^{-6}$ C อยู่ที่ตำแหน่ง $P(1,2,-1)$ เมตร และประจุชนิดจุด $Q_2 = 3\times10^{-6}$ C อยู่ที่ตำแหน่ง $Q(3,1,2)$ ในสูญญากาศ จงหาแรงที่กระทำต่อประจุ Q_2 เนื่องจาก Q_1
6. หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(3,2,-2)$ ในอวกาศว่าง เนื่องจากประจุชนิดจุดขนาด 500 μC อยู่ที่จุดกำเนิด
7. หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(3,2,-2)$ ในอวกาศว่าง เนื่องจากประจุชนิดจุดขนาด 500 μC อยู่ที่จุด $R(-2,2,1)$
8. ประจุชนิดเส้นความยาวเป็นอนันต์มีความหนาแน่นประจุเป็น $\rho_L = 50\ nC/m$ ตลอดทั้งเส้น วางตัวอยู่บนแกน y ในอวกาศว่าง ให้หาสนามไฟฟ้าที่จุด $P(2,3,1)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก
9. ประจุชนิดแผ่นที่มีความกว้างยาวเป็นอนันต์สองแผ่นมีความหนาแน่นประจุสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งแผ่นเป็น 10 $\mu C/m^2$ และ 10 $\mu C/m^2$ แผ่นแรกวางอยู่ในระนาบ $x-y$ ที่ $z=-5$ เมตร แผ่นที่สอง วางอยู่ในระนาบ $x-y$ ที่ $z=5$ เมตร ให้หาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด

    ก) (0, –7, 0)

    ข) (0, 0, 0)

    ค) (0, 7, 0)
10. จงบอกคุณสมบัติของฟลักซ์ไฟฟ้าและความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า
11. กฎของเกาส์กล่าวว่าอย่างไร
12. ผิวแบบเกาส์ชนิดพิเศษมีลักษณะอย่างไร
13. ประจุชนิดจุดขนาด 10 μC วางอยู่ที่จุดกำเนิด จงหาปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านส่วนของผิวทรงกลมที่มี $0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/4$ รัศมีสองหน่วย
14. จากข้อ 13 จงหาปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ออกจากผิวปิดทรงกลมรัศมีสองหน่วย
15. จงอธิบายงานที่ได้จากการเคลื่อนประจุในสนามไฟฟ้าสถิต

16. คำนวณหางานที่ทำในการเคลื่อนย้ายประจุขนาด 5 C จากจุด $(4, 2, 0)$ ไปยังจุด $(1, 1, 0)$ ตามเส้นตรง $3y = x + 2,\ z = 0$ ผ่านสนามไฟฟ้า $\bar{E} = 2y\hat{a}_x + 2x\hat{a}_y$ V/m
17. ประจุชนิดจุดขนาด 6 nC วางอยู่ที่จุดกำเนิดในอวกาศว่างให้หาศักย์ไฟฟ้าที่จุด P(0.2, -0.4, 0.4) เมื่อจุดอ้างอิงศักย์ไฟฟ้าศูนย์อยู่ที่อนันต์

☺☺☺☺☺