หน่วยที่ 4
เวกเตอร์แคลคูลัส

4.1 บทนำ

เวกเตอร์แคลคูลัส (Vector calculus) เป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ที่ศึกษาถึงอนุพันธ์และอินทิเกรทของสนามเวกเตอร์และสนามสเกลาร์ มีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก การดำเนินการในเวกเตอร์แคลคูลัสประกอบด้วยสามตัวดำเนินการคือ เกรเดียนท์ (Gradient) ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) และ เคิร์ล (Curl) และทฤษฎีที่สำคัญคือ ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence theorem) และทฤษฎี บทของสโตกส์ (Stroke theorem)

4.2 เกรเดียนท์ (Gradient)

นิยาม เกรเดียนท์ของสนามสเกลาร์ P (เขียนแทนด้วย " grad P ") เป็นเวกเตอร์ในแนวทิศทางอันหนึ่งซึ่งทำให้อนุพันธ์ของ P เทียบกับระยะทางในแนวทิศนั้นมีค่าสูงสุด และเวกเตอร์ดังกล่าวมีขนาดเท่ากับค่าอนุพันธ์สูงสุดนั้นนั่นเอง

เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\text{grad } P = \hat{a}_N \left(\frac{dP}{dN} \right) \tag{4.1}$$

เมื่อ

$\hat{a}_N$ = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์ (equipotential surface) ของ P

และมีทิศชี้ไปในแนว $d\bar{N}$ ซึ่ง P มีค่าเพิ่มขึ้นสูงสุด

$\frac{dP}{dN}$ = ค่าอนุพันธ์สูงสุดของ P เทียบกับระยะทาง

จากนิยามของเกรเดียนท์สามารถพิสูจน์ได้ว่า

ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

$$\text{grad } P = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \hat{a}_z \tag{4.2}$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\text{grad } P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \hat{a}_\rho + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \hat{a}_\phi + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \hat{a}_z \tag{4.3}$$

ระบบพิกัดทรงกลม

$$\text{grad } P = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \hat{a}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \hat{a}_\phi \tag{4.4}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 ถ้า $P = 1000 - x^2 - y^2$ จงหา grad P

วิธีทำ

$$\text{grad P} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\hat{a}_z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= -2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= -2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(1000 - x^2 - y^2\right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น

$$\text{grad P} = (-2x)\hat{a}_x + (-2y)\hat{a}_y + (0)\hat{a}_z$$

$$= -2x\,\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y$$

ตอบ $-2x\,\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y$

4.3 ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence)

นิยาม ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์ $\bar{A}$ (เขียนแทนด้วย " div $\bar{A}$") คือค่าฟลักซ์ของ $\bar{A}$ ที่ไหลออกจากผิวปิดรอบปริมาตรเล็กๆ อันหนึ่ง คิดต่อหน่วยปริมาตรขณะที่ปริมาตรนั้นหดเล็กลงสู่ค่าศูนย์

เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\text{div}\,\bar{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int_S A \cdot d\bar{S}}{\Delta v} \qquad (4.5)$$

จากนิยามของไดเวอร์เจนซ์สามารถพิสูจน์ได้ว่า

ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \tag{4.6}$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\phi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\right) \tag{4.7}$$

ระบบพิกัดทรงกลม

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A\phi\right) \tag{4.8}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 ถ้า $V_x = V_y = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ จงหาค่าไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{V} = V_x\hat{a}_x + V_y\hat{a}_y$

<u>วิธีทำ</u>

$$\mathrm{div}\ \vec{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$= -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ดังนั้น

$$\operatorname{div}\bar{V} = -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\operatorname{div}\bar{V} = -\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ตอบ $-\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

4.4 เคิร์ล (Curl)

นิยาม เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\bar{A}$ (เขียนแทนด้วย " $\operatorname{curl}\bar{A}$") เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีส่วนประกอบในทิศทางอันใดอันหนึ่ง เท่ากับอินทิกรัลเส้นของ $\bar{A}$ รอบวงปิด (closed path) เล็ก ๆ ซึ่งอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางของส่วนประกอบนั้นคิดต่อหน่วยพื้นที่ภายในวงปิดนั้น ขณะที่พื้นที่นั้นหดเล็กลงสู่ค่าศูนย์ เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\left(\operatorname{curl}\bar{A}\right)_n = \lim_{\Delta S_n \to 0} \oint \frac{\bar{A}\cdot d\bar{L}}{\Delta S_n} \qquad (4.9)$$

จากนิยามของเคิร์ล สามารถพิสูจน์ได้ว่า

ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\bar{A} = {} & \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_y)\right]\hat{a}_x + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(A_z)\right]\hat{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A_x)\right]\hat{a}_z\end{aligned} \qquad (4.10)$$

หรือ

$$\operatorname{curl}\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (4.11)$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\text{curl } \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_\phi)\right]\hat{a}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(A_z)\right]\hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\rho)\right]\hat{a}_z \tag{4.12}$$

หรือ

$$\text{curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{a}_\rho}{\rho} & \hat{a}_\phi & \frac{\hat{a}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

ระบบพิกัดทรงกลม

$$\text{curl } \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\right]\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r) - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\right]\hat{a}_\phi \tag{4.14}$$

หรือ

$$\text{curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{a}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\hat{a}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\hat{a}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 ถ้า $V_x = V_y = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ จงหาค่าเคิร์ลของ $\vec{V} = V_x\hat{a}_x + V_y\hat{a}_y$

<u>วิธีทำ</u>

$$\text{curl } \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

เนื่องจาก V_x และ V_y ไม่แปรตาม z ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

และ $V_z = 0$ ตามโจทย์กำหนด

$$\text{curl } \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \vec{V} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(V_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(V_x\right)\right\}\hat{a}_z$$

$$= \left\{\frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{a}_z$$

$$= \frac{y-x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

<u>ตอบ</u> $\dfrac{y-x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$

4.5 ตัวดำเนินการเดลหรือเนบลา (del or nabla operator)

เดลหรือเนบลา (∇) เป็นตัวดำเนินการทางเวกเตอร์ซึ่งมีนิยามในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเขียนเป็น

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z \tag{4.16}$$

จากนิยามของเดล พิสูจน์ได้ว่า

$$\text{grad } P = \nabla P \tag{4.17}$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \tag{4.18}$$

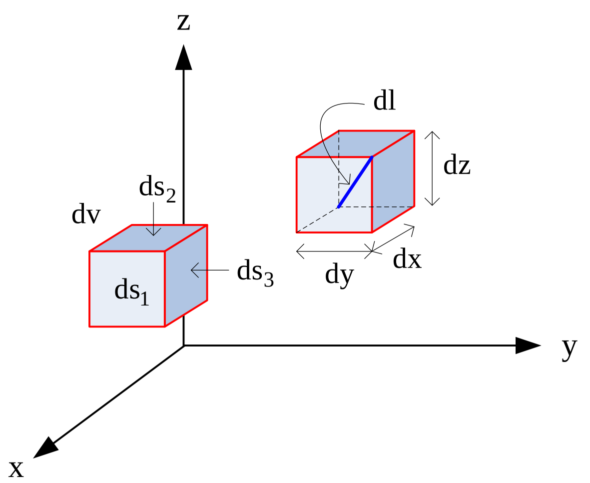
$$\text{curl } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \tag{4.19}$$

4.6 ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียล

ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลเป็นปริมาณเล็กๆ สำหรับพิจารณาในระดับจุลภาค ในที่นี้เมื่อต้องการพิจารณาปริมาณของระบบพิกัดในระดับจุลภาคจึงต้องแบ่งปริมาณของระบบพิกัดออกเป็นส่วนเล็กๆ ทั้งระยะทาง พื้นที่ และปริมาตร

4.6.1 ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงเหลี่ยมแสดงได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

ระยะทางดิฟเฟอเรนเชียลตามแนวแกน dx , dy , dz

ระยะทางดิฟเฟอเรนเชียล $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

พื้นที่ดิฟเฟอเรนเชียล $ds_1 = dydz$, $ds_2 = dxdy$, $ds_3 = dxdz$

ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล $dv = dxdydz$

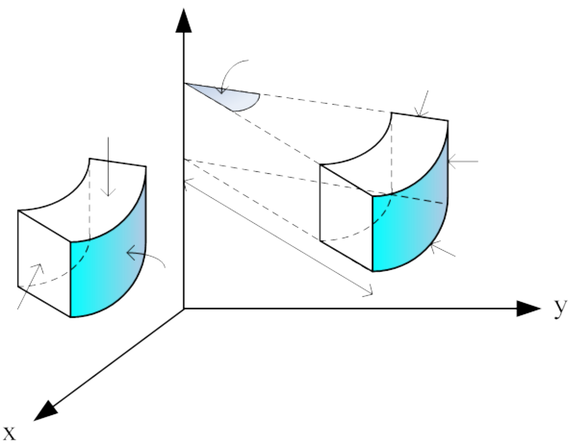
4.6.2 ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงกระบอก

ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงเหลี่ยมแสดงได้ดังรูปที่ 4.2

ความยาวทางดิฟเฟอเรนเชียล $d\rho$, $\rho d\phi$, dz

พื้นที่ทางดิฟเฟอเรนเชียล $ds_1 = \rho d\phi dz$, $ds_2 = d\rho dz$, $ds_3 = \rho d\rho d\phi$

ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล $dv = \rho d\rho d\phi dz$



รูปที่ 4.2 แสดงปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลในระบบพิกัดทรงกระบอก

4.6.3 ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงกลม

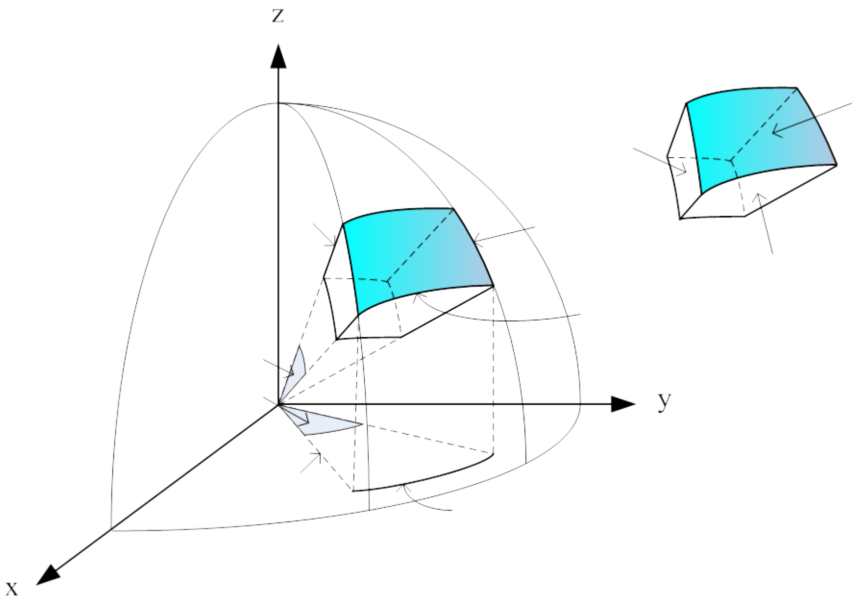
ปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลของระบบพิกัดทรงเหลี่ยมแสดงได้ดังรูปที่ 4.3

ความยาวทางดิฟเฟอเรนเชียล dr , $rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$

พื้นที่ทางดิฟเฟอเรนเชียล $ds_1 = rdrd\theta$, $ds_2 = r\sin\theta drd\phi$,

$ds_3 = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล $dv = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$



รูปที่ 4.3 แสดงปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลในระบบพิกัดทรงกลม

4.7 ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence theorem)

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ หรือทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) มีใจความว่า " อินทิกรัลของส่วนประกอบตั้งฉากของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทั่วผิวปิด (closed surface) อันใดอันหนึ่งจะมีค่าเท่ากับอินทิกรัลของไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทั่วปริมาตรภายในผิวปิดอันนั้น "

เขียนเป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})dv \qquad (4.20)$$

โดยที่ปริมาณทางซ้ายมือของสมการที่ (4.20) คือผลรวมของฟลักซ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ที่พุ่งออกจากผิวปิด S ในทิศทางตั้งฉากกับผิว และปริมาณทางขวามือคือผลรวมของไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตลอดทั่วทั้งปริมาตร V

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาค่าของอินทิกรัลในแต่ละข้างของสมการที่แสดงถึงทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ คือ $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})dv$ กำหนดให้ $\vec{A} = 2\rho^2\hat{a}_\rho$ และปริมาตรที่ใช้อยู่ในช่วง $0\le\rho\le 3,\ 0\le z\le 2$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u>

$$A_\rho = 2\rho^2$$

$$A_\phi = A_z = 0$$

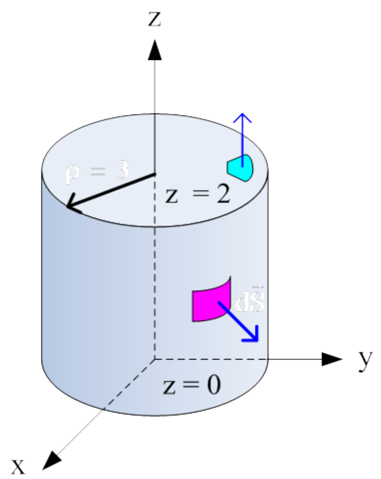
หาค่าไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{A}$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_\phi\right) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(2\rho^3\right) + 0 + 0$$

$$= 6\rho$$

เนื่องจากผิวปิดเป็นผิวรูปทรงกระบอก โดยแบ่งผิวออกเป็น 3 ส่วนด้วยกัน คือ ผิวด้านข้างที่เป็นรูปทรงกระบอก ผิวด้านบนกับผิวด้านล่างที่เป็นรูปวงกลม ดังแสดงในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แสดงปริมาณผิวแบบรูปทรงกระบอก

1. หาปริมาณด้านซ้ายของสมการทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{side}\vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{top}\vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{bottom}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

เนื่องจากทิศทางของเวกเตอร์ผิว $d\vec{S}$ ทั้งด้านบน (top) และด้านล่าง (bottom) จะตั้งฉากกับทิศทางของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$\int_{top} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \int_{bottom} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0$$

จะได้

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \int_{side} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$= \quad \int_{z=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(2\rho^2\,\hat{a}_\rho\right) \cdot \left(\rho d\phi dz\,\hat{a}_\rho\right)$$

$$= \quad \int_{z=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2\rho^3 d\phi dz$$

เมื่อ $\rho \;=\; 3$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \;=\; 27\left(\phi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(z\Big|_0^2\right)$$

$$= \; (54)(2\pi)(2)$$

$$= \; 216\pi$$

2. หาปริมาณด้านขวาของสมการทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

เมื่อ $\quad \nabla \cdot \vec{A} \;=\; 6\rho$ และ $dv \;=\; \rho d\rho d\phi dz$

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{A})\, dv \quad = \quad \int_{z=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{3} (6\rho)(\rho d\rho d\phi dz)$$

$$= \; 6\int_{z=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{3} \rho^2 d\rho d\phi dz$$

$$= \; 6\left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^3\right)\left(\phi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(z\Big|_0^2\right)$$

$$= \; 2(27)(2\pi)(2)$$

$$= \; 216\pi$$

จะได้ว่าปริมาณด้านซ้ายของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์คือ $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \;=\; 216\pi$ มีค่าเท่ากับปริมาณด้านขวาของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์คือ $\oint_S \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) dv \;=\; 216\pi$

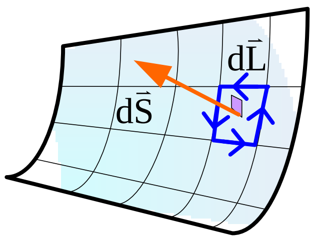
4.8 ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes' Theorem)

ทฤษฎีบทของสโตกส์กล่าวว่า " อินทิกรัลเส้นของสนามเวกเตอร์ $\bar{A}$ ตามเส้นวงปิดวงใดวงหนึ่งจะมีค่าเท่ากับอินทิกรัลผิวของส่วนประกอบตั้งฉากของเคิร์ลของ $\bar{A}$ ทั่วพื้นผิวที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นวงปิดนั้น "

เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\oint_L \bar{A}\cdot d\bar{L} \quad = \quad \int_S \left(\nabla\times\bar{A}\right)\cdot d\bar{S} \qquad (4.21)$$

โดยที่ทิศทางการวนของ $d\bar{L}$ รอบเส้นวงปิด และทิศทางของ $d\bar{S}$ เป็นไปตามหลักเกณฑ์สกรูเกลียวขวา (right-hand screw rule) ดังแสดงในรูปที่ 4.5 กล่าวคือทิศทางการวนของ $d\bar{L}$ ไปทางซ้าย (ทวนเข็มนาฬิกา) จะได้ทิศทางของ $d\bar{S}$ เป็นทิศทางที่พุ่งออกจากหน้ากระดาษและตั้งฉากกับระนาบการวนของ $d\bar{L}$



รูปที่ 4.5 แสดงทิศทางของ $d\bar{L}$ และ $d\bar{S}$ เป็นไปตามหลักเกณฑ์สกรูเกลียวขวา

ตัวอย่างที่ 4.5 จงหาค่าอินทิกรัลในแต่ละข้างของสมการที่แสดงถึงทฤษฎีบทของสโตกส์คือ $\oint_L \bar{A}\cdot d\bar{L} = \int_S \left(\nabla\times\bar{A}\right)\cdot d\bar{S}$ เมื่อกำหนดให้เวกเตอร์ $\bar{A}$ มีนิพจน์เป็น $\bar{A} = 2\rho e^{\sin\phi}\,\hat{a}_\rho + \rho\cos\phi e^{\sin\phi}\,\hat{a}_\phi$ เส้นทางที่ใช้ในการอินทิเกรตตามวงรอบเป็นวงกลม $\rho=1$, $z=0$ และให้ทิศการวนอยู่ในแนว $\hat{a}_\phi$ ดังแสดงในรูปที่ 4.6

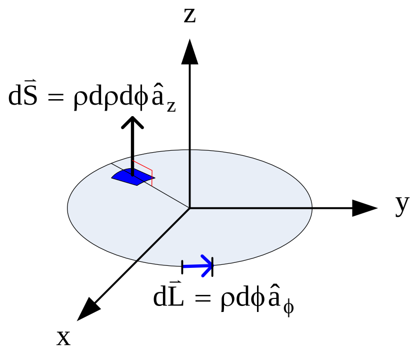
<u>วิธีทำ</u>

จากค่าของ $\bar{A}$ ที่กำหนดให้ จะได้

$$A_\rho = 2\rho e^{\sin\phi}$$

$$A_\phi = \rho\cos\phi e^{\sin\phi}$$

$$A_z = 0$$



รูปที่ 4.6 แสดงทิศทางของ $d\vec{L}$ และ $d\vec{S}$

ซึ่งทั้งสามค่านี้ไม่เป็นฟังก์ชันของ z ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

และ

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right)\hat{a}_\rho + \left(\frac{\partial}{\partial z}(A_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho}(A_z)\right)\hat{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\rho)\right)\hat{a}_z$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \cos\phi e^{\sin\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(2\rho e^{\sin\phi}\right)\right)\hat{a}_z$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(2\rho\cos\phi e^{\sin\phi} - 2\rho\cos\phi e^{\sin\phi}\right)\hat{a}_z$$

$$= \vec{0}$$

1. หาปริมาณด้านขวาของสมการทฤษฎีบทของสโตกส์

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \vec{0}$$

2. หาปริมาณด้านซ้ายของสมการทฤษฎีบทของสโตกส์

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(2\rho e^{\sin\phi}\hat{a}_\rho + \rho\cos\phi e^{\sin\phi}\hat{a}_\phi\right) \cdot \left(\rho d\phi \hat{a}_\phi\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos\phi e^{\sin\phi} d\phi$$

จาก

$$d\sin\phi = \cos\phi d\phi$$

$$d\phi = \frac{d\sin\phi}{\cos\phi}$$

และ $\rho = 1$ จะได้

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{\cos\phi} e^{\sin\phi} d\sin\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin\phi} d\sin\phi$$

$$= e^{\sin\phi}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= e^0 - e^0$$

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{L} = 0$$

จะได้ว่าค่าทั้งสองด้านมีค่าเท่ากันคือศูนย์

☺☺☺☺☺

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 4

1. ถ้า $P = x^2 + y^2 + z^2$ จงหา ∇P
2. ถ้า $\bar{A} = x^2 \hat{a}_x + y^3 \hat{a}_y + xy^3 z \hat{a}_z$ จงหา $\nabla \cdot \bar{A}$
3. ถ้า $\bar{A} = x^2 \hat{a}_x + y^3 \hat{a}_y + xy^3 z \hat{a}_z$ จงหา $\nabla \times \bar{A}$
4. จงคำนวณปริมาณทั้งสองข้างของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ $\oint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = \int_v (\nabla \cdot \bar{A}) dv$ กำหนดให้ $\bar{A} = \rho \hat{a}_\rho$ และปริมาตรที่ใช้อยู่ในช่วง $0 \le \rho \le 2$, $0 \le z \le 1$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก
5. จงคำนวณปริมาณในแต่ละข้างของสมการทฤษฎีบทของสโตกส์ คือ $\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{L} = \int_S \left(\nabla \times \bar{A}\right) \cdot d\bar{S}$ เมื่อกำหนดให้เวกเตอร์ $\bar{A}$ มีนิพจน์เป็น $\bar{A} = x^2 y \hat{a}_x + 2xy \hat{a}_y$ เส้นทางการอินทิเกรตเป็นสี่เหลี่ยมจากจุด $P_1(3, -5, 0)$ ไปจุด $P_2(3, 5, 0)$ ไปจุด $P_3(-3, 5, 0)$ ไปจุด $P_4(-3, -5, 0)$ ไปจุด $P_1(3, -5, 0)$

☺☺☺☺☺