หน่วยที่ 1
การวิเคราะห์เวกเตอร์

1.1 บทนำ

ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณสำคัญที่มีประโยชน์มากในทางคณิตศาสตร์และทางฟิสิกส์ ใช้อธิบายสภาพการณ์หรือปรากฏการณ์ต่างๆทางฟิสิกส์ของสิ่งต่างๆในธรรมชาติ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นปริมาณแบบเวกเตอร์ การศึกษาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กให้เข้าใจในเบื้องต้นจึงต้องมีความรู้และความเข้าในปริมาณเวกเตอร์อย่างถ่องแท้

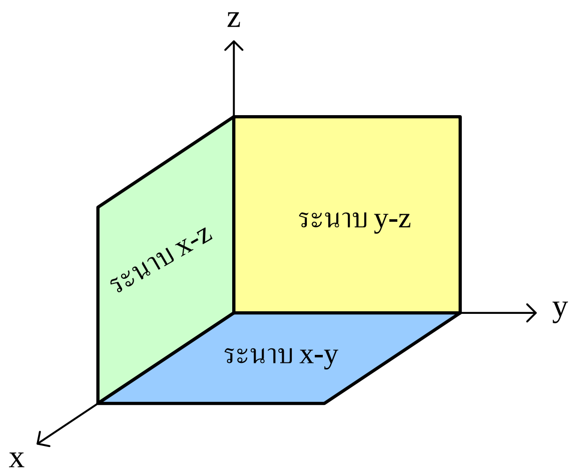
1.2 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ (Scalars and Vectors)

ปริมาณสเกลาร์ หมายถึง สิ่งใดๆที่มีแต่ขนาด มีแต่จำนวน มีแต่ความยาวความสั้น โดยไม่มี ทิศทาง เช่น วัตถุชิ้นหนึ่งตกลงมาเป็นระยะทาง 10 เมตร ในเวลา 2 วินาที ทั้งค่า 10 และค่า 2 เรียกว่าปริมาณทางสเกลาร์ และปริมาณทางสเกลาร์อื่นๆ เช่น มวลสาร ความหนาแน่น น้ำหนัก ความกดดัน ปริมาณ กระแสไฟฟ้า หรือแรงเคลื่อนไฟฟ้า เป็นต้น

ปริมาณเวกเตอร์ หมายถึง สิ่งที่แสดงถึงระยะทางหรือขนาด พร้อมด้วยทิศทาง คำว่า "ขนาด" อาจหมายถึงขนาดของความเร็ว ความเร่ง แรง ความแรงของสนามไฟฟ้า (electric field intensity) หรือความแรงของสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity) เป็นต้น ดังนั้นเมื่อพิจารณาปริมาณเวกเตอร์จึงเป็น ความเร็ว ความเร่ง แรง ความแรงของสนามไฟฟ้า (electric field intensity) หรือความแรงของสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity) ที่มีทิศทางด้วย

ในที่นี้การเขียนสัญญลักษณ์ทางเวกเตอร์ใช้ $\bar{A}$ หมายถึงว่า A เป็นปริมาณทางเวกเตอร์

1.3 ระบบแกนอ้างอิงสามมิติ x-y-z



รูปที่ 1.1 แสดงระบบแกนอ้างอิงสามมิติและระนาบสองมิติที่เกี่ยวข้อง

เป็นระบบแกนเพื่อใช้สำหรับอ้างอิงปริมาณเวกเตอร์เพื่อแสดงปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างจัดเจน ง่ายต่อการวิเคราะห์เวกเตอร์ ระบบแกนอ้างอิงสามมิติประกอบขึ้นด้วยแนวเส้นตรงสามเส้นวางตัวในทิศทางที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันคือ แกน x แกน y และแกน z ดังแสดงในรูปที่ 1.1 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงแกนทั้งสามรวมถึงระนาบแบบสองมิติคือ ระนาบ x – y ระนาบ y – z และระนาบ x – z

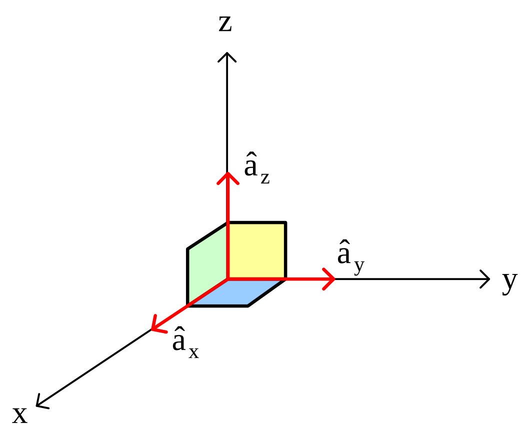
1.4 การเขียนปริมาณเวกเตอร์แบบ 3 มิติ

ให้เขียนเวกเตอร์ในกรอบแกนอ้างอิงแบบ 3 มิติคือ แกน x แกน y แกน z ที่ทำมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังแสดงในรูปที่ 1.2 ที่แสดงถึงแกนอ้างอิงแบบสามมิติและเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{a}_x$ $\hat{a}_y$ และ $\hat{a}_z$ (เวกเตอร์หนึ่งหน่วยเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย โดยปกติจะใช้เป็นเวกเตอร์กำหนดทิศทางของเวกเตอร์นั้น ๆ) โดยที่

$\hat{a}_x$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยประจำแกน x มีทิศทางพุ่งออกจากหน้ากระดาษเป็นทิศทางบวก

$\hat{a}_y$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยประจำแกน y มีทิศทางชี้ไปทางซ้ายของหน้ากระดาษเป็นทิศทางบวก

$\hat{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยประจำแกน z มีทิศทางชี้ขึ้นเป็นทิศทางบวก



รูปที่ 1.2 แสดงแกนอ้างอิงแบบ 3 มิติและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยประจำแต่ละแกน

รูปแบบเวกเตอร์ในระบบแกนสามมิติ เขียนดังนี้

$$\bar{A} \;=\; A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (1.1)$$

โดยที่

A_x เป็นส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ (Scalar component) ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน x

A_y เป็นส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน y

A_z เป็นส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน z

และ

$A_x\hat{a}_x$ เป็นส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ (Vector component) ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน x

$A_y\hat{a}_y$ เป็นส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน y

$A_z\hat{a}_z$ เป็นส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ ในแนวแกน z

ตัวอย่างเวกเตอร์ในระบบแกนสามมิติ

$$\bar{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

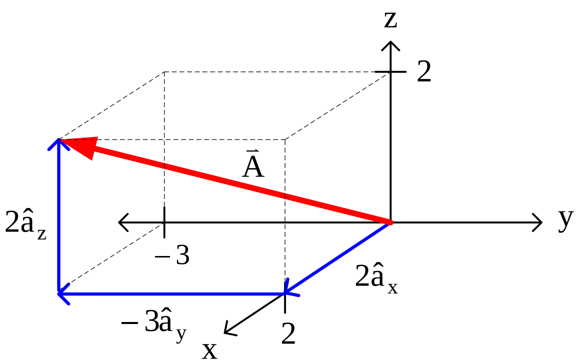
ในที่นี้ $A_x = 2$, $A_y = -3$ และ $A_z = 2$

ความหมายคือ $\bar{A}$ มีส่วนประกอบในแนวแกน x ในทิศทางบวกเป็น 2 หน่วย

$\bar{A}$ มีส่วนประกอบในแนวแกน y ในทิศทางลบเป็น 3 หน่วย

$\bar{A}$ มีส่วนประกอบในแนวแกน z ในทิศทางบวกเป็น 2 หน่วย

ดังนั้นสามารถเขียนเป็นภาพของเวกเตอร์ในระบบแกนสามมิติได้ดังรูปที่ 1.3

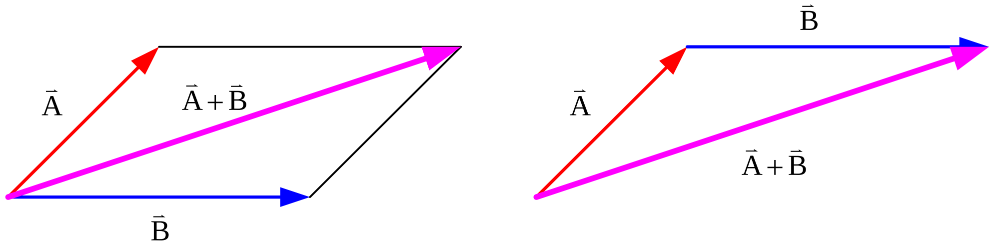


รูปที่ 1.3 แสดงเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบแกนสามมิติ x – y – z

1.5 พีชคณิตเวกเตอร์ (Vector Algebra)

1.5.1 การบวกและลบเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ (Vector Addition) เป็นไปตามกฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 1.4 เป็นการบวกระหว่าง $\bar{A}$ กับ $\bar{B}$



(ก) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานของเวกเตอร์ (ข) รูปสามเหลี่ยมของเวกเตอร์

รูปที่ 1.4 การบวกเวกเตอร์

กฎการสลับที่ (Commutative law)

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A} \tag{1.2}$$

กฎการจัดหมู่ (Associative law)

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \tag{1.3}$$

การลบเวกเตอร์ (Subtraction of Vector)

$$\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B}) \tag{1.4}$$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\vec{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหา

ก. $\vec{A}+\vec{B}$

ข. $\vec{A}-\vec{B}$

ก. **<u>วิธีทำ</u>**

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= (A_x+B_x)\hat{a}_x + (A_y+B_y)\hat{a}_y + (A_z+B_z)\hat{a}_z \\ &= (2+1)\hat{a}_x + (-3+2)\hat{a}_y + (-6-2)\hat{a}_z \\ &= 3\hat{a}_x - \hat{a}_y - 8\hat{a}_z\end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> $3\hat{a}_x - \hat{a}_y - 8\hat{a}_z$

ข. <u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B} &= (A_x-B_x)\hat{a}_x + (A_y-B_y)\hat{a}_y + (A_z-B_z)\hat{a}_z \\ &= (2-1)\hat{a}_x + (-3-2)\hat{a}_y + (-6+2)\hat{a}_z \\ &= \hat{a}_x - 5\hat{a}_y - 4\hat{a}_z\end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> $\hat{a}_x - 5\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$

1.5.2 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ใช้กฎการจัดหมู่ และกฎการแจกแจง (Distributive)

$$(r+s)(\vec{A}+\vec{B}) = r(\vec{A}+\vec{B})+s(\vec{A}+\vec{B}) \quad (1.5)$$

$$(r+s)(\vec{A}+\vec{B}) = r\vec{A}+r\vec{B} + s\vec{A}+s\vec{B} \quad (1.6)$$

เวกเตอร์ 2 ตัว กล่าวได้ว่าเท่ากัน ถ้าผลต่างของเวกเตอร์ทั้งสองนั้นเท่ากับ 0

$$\vec{A} = \vec{B} \text{ ถ้า } \vec{A} - \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 2 เท่าของ $\vec{A}$

<u>วิธีทำ</u>

$$2\vec{A} = 2(2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z)$$

$$= 4\hat{a}_x - 6\hat{a}_y - 12\hat{a}_z$$

<u>ตอบ</u> $4\hat{a}_x - 6\hat{a}_y - 12\hat{a}_z$

1.5.3 การหารเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การหารเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยสเกลาร์ r ให้นำส่วนกลับของ r คือ 1/r มาคูณกับ $\vec{A}$

$$\frac{\vec{A}}{r} = \frac{1}{r}\vec{A} \quad (1.8)$$

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ จงหา $\frac{\vec{A}}{2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\vec{A}}{2} = \frac{1}{2}\vec{A}$$

$$= \frac{1}{2}2\hat{a}_x - \frac{1}{2}3\hat{a}_y - \frac{1}{2}6\hat{a}_z$$

$$\frac{\bar{A}}{2} = \hat{a}_x - \frac{3}{2}\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$$

<u>**ตอบ**</u> $\hat{a}_x - \frac{3}{2}\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$

1.6 ผลคูณเวกเตอร์

1.6.1 ผลคูณแบบจุดหรือผลคูณชนิดสเกลาร์ (Dot Product or Scalar Product)

ผลคูณแบบจุด (dot product หรือ Scalar product) เป็นผลคูณของค่าขนาดของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใดๆ และคูณกับค่า cosine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองนั้น เช่น ถ้า $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นเวกเตอร์ จะได้ว่า

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta_{AB} \qquad (1.9)$$

โดยที่

$|\bar{A}|$ คือ ขนาดของ $\bar{A}$

$|\bar{B}|$ คือ ขนาดของ $\bar{B}$

θ_{AB} คือมุมระหว่าง $\bar{A}$ และ $\bar{B}$

และใช้กฎการสลับที่ จะได้

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A} \qquad (1.10)$$

สำหรับเครื่องหมายของมุม ไม่มีผลต่อเทอม cosine

จาก $\bar{A}\cdot\bar{B}$ จะให้ผลลัพธ์เป็นบวกของสเกลาร์ 9 เทอม แต่ละเทอมประกอบด้วย ผลคูณแบบจุด ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ 2 เวกเตอร์นี้ ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่แตกต่างกัน 2 ตัวของระบบแกนพิกัดเท่ากับ 90^o $(\cos 90^o = 0)$ จึงได้

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_y = 0 \qquad (1.11)$$

ส่วนอีก 3 เทอม $(\cos 0^o = 1)$ จึงได้

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z = 1 \qquad (1.12)$$

ดังนั้น

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.13}$$

เวกเตอร์ที่คูณแบบจุด ด้วยตัวเองจะให้ค่าขนาดกำลังสองคือ

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 = \left|\vec{A}\right|^2 \tag{1.14}$$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ดอทด้วยตัวเองจะเท่ากับ 1

$$\hat{a}\cdot\hat{a} = 1 \tag{1.15}$$

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\vec{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหา $\vec{A}\cdot\vec{B}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= (2)(1)+(-3)(2)+(-6)(-2) \\ &= 2-6+12 \\ &= 8\end{aligned}$$

ตอบ 8

1.6.2 ผลคูณกากบาทหรือผลคูณชนิดเวกเตอร์ (Cross Product or Vector Product)

การคูณแบบกากบาท หรือการคูณแบบเวกเตอร์ ระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ เท่ากับ

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{a}_N\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta_{AB} \tag{1.16}$$

โดยที่

$\left|\vec{A}\right|$ คือ ขนาดของ $\vec{A}$

$\left|\vec{B}\right|$ คือ ขนาดของ $\vec{B}$

θ_{AB} คือมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$\hat{a}_N$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบการคูณกากบาท (Cross) ระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยมีทิศทางเป็นไปตามกฎสกรูมือขวา

ทิศทางของ $\bar{A}\times\bar{B}$ จะเป็นไปตามกฎสกรูมือขวา เมื่อ $\bar{A}$ หมุนไปสู่ $\bar{B}$ ถ้าใช้การคูณแบบเวกเตอร์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้ดังนี้

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a} \tag{1.17}$$

$$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \tag{1.18}$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \tag{1.19}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\bar{A}\times\bar{B} &= A_xB_x\hat{a}_x\times\hat{a}_x + A_xB_y\hat{a}_x\times\hat{a}_y + A_xB_z\hat{a}_x\times\hat{a}_z \\ &= +A_yB_x\hat{a}_y\times\hat{a}_x + A_yB_y\hat{a}_y\times\hat{a}_y + A_yB_z\hat{a}_y\times\hat{a}_z \\ &= +A_zB_x\hat{a}_z\times\hat{a}_x + A_zB_y\hat{a}_z\times\hat{a}_y + A_zB_z\hat{a}_z\times\hat{a}_z\end{aligned}$$

$$\bar{A}\times\bar{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{a}_z \tag{1.20}$$

หรือเขียนในรูปดีเทอร์มีเนนท์ (Determinant) ได้ดังนี้

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.21}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $\bar{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\bar{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหา $\bar{A}\times\bar{B}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-2)\hat{a}_x + (-6)(1)\hat{a}_y + (2)(2)\hat{a}_z - (1)(-3)\hat{a}_z - (2)(-6)\hat{a}_x - (-2)(2)\hat{a}_y$$

$$= 6\hat{a}_x - 6\hat{a}_y + 4\hat{a}_z + 3\hat{a}_z + 12\hat{a}_x + 4\hat{a}_y$$

$$= 18\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 7\hat{a}_z$$

<u>ตอบ</u> $18\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 7\hat{a}_z$

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $\bar{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\bar{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหา $\bar{B} \times \bar{A}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{B} \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-6)\hat{a}_x + (-2)(2)\hat{a}_y + (-3)(1)\hat{a}_z - (2)(2)\hat{a}_z - (-3)(-2)\hat{a}_x - (-6)(1)\hat{a}_y$$

$$= -12\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 3\hat{a}_z - 4\hat{a}_z - 6\hat{a}_x + 6\hat{a}_y$$

$$= -18\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 7\hat{a}_z$$

<u>ตอบ</u> $-18\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 7\hat{a}_z$

1.7 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ในทิศทางที่กำหนด

1.7.1 ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของเวกเตอร์หนึ่งในทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง (Scalar Projection)

การหาส่วนประกอบ ชนิดสเกลาร์ ของเวกเตอร์ หนึ่ง ในทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง แสดงได้ดังรูปที่ 1.5 (ก) โดยส่วนประกอบสเกลาร์ (Scalar Projection) ของ $\bar{B}$ ในทิศทางของ $\bar{A}$ คือ

$$\bar{B} \cdot \hat{a}_{\bar{A}} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{A}}{|\bar{A}|} = |\bar{B}|\cos\theta_{BA} \qquad (1.22)$$

เครื่องหมายของส่วนประกอบเป็นบวก ถ้า $0 \le \theta_{BA} < 90^o$ และ

เครื่องหมายของส่วนประกอบเป็นลบ ถ้า $90^o < \theta_{BA} \le 180^o$

ดังนั้นการฉายภาพในเทอมของเรขาคณิต (Geometrical term projection) ซึ่งก็คือส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ กำหนดได้ด้วยการดอทนั่นเอง เช่น $\vec{B}\cdot\hat{a}$ คือ ภาพฉาย (projection) ของ $\vec{B}$ ในทิศทาง $\hat{a}$

1.7.2 ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งในทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง (Vector Projection)

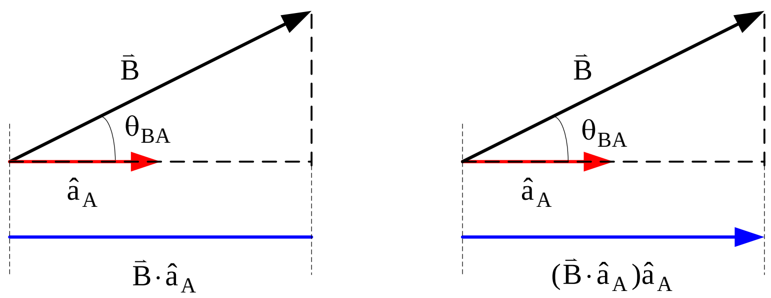
เพื่อให้ได้ส่วนประกอบเวกเตอร์ (Vector Projection) ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ เราคูณอย่างง่ายๆ ในค่าสเกลาร์ของส่วนประกอบนี้ด้วย $\hat{a}_A$ ดังแสดงในรูปที่ 1.5 (ข) ดังนั้น ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ $\vec{B}\cdot\hat{a}_A$ และส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ $(\vec{B}\cdot\hat{a}_A)\hat{a}_A$

ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ

$$(\vec{B}\cdot\hat{a}_A)\hat{a}_A = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{|\vec{A}|}\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1.23}$$

หรือ

$$\text{ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ } \vec{B} \text{ ในทิศทางของ } \vec{A} = \left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{|\vec{A}|^2}\right)\vec{A} \tag{1.24}$$



(ก) (ข)

รูปที่ 1.5 ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์และชนิดเวกเตอร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$
(ก) ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$
(ข) ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $\bar{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\bar{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของ $\bar{A}$ ในทิศทางของ $\bar{B}$

<u>วิธีทำ</u>

ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของ $\bar{A}$ ในทิศทางของ $\bar{B}$

$$\begin{aligned} \bar{A}\cdot\hat{a}_{\bar{B}} &= \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|} \\ &= \frac{(2)(1)+(-3)(2)+(-6)(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> $\frac{8}{3}$

ตัวอย่างที่ 1.8 จากตัวอย่างที่ 1.7 จงหามุมระหว่าง $\bar{A}$ และ $\bar{B}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|} = |\bar{A}|\cos\theta_{BA}$$

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{A}||\bar{B}|} = \frac{8}{(3)(7)} = \frac{8}{21}$$

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\frac{8}{21} = 67.60^{o}$$

<u>ตอบ</u> 67.60^{o}

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $\bar{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ และ $\bar{B} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงหาส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ ในทิศทางของ $\bar{B}$

<u>วิธีทำ</u>

ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ ในทิศทางของ $\bar{B}$

$$\begin{aligned} (\bar{A}\cdot\hat{a}_{\bar{B}})\hat{a}_{\bar{B}} &= \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|}\hat{a}_{\bar{B}} \\ &= \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|}\frac{\bar{B}}{|\bar{B}|} \end{aligned}$$

$$(\bar{A}\cdot\hat{a}_{\bar{B}})\hat{a}_{\bar{B}} = \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{|\bar{B}|^2}\bar{B}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\hat{a}_{\vec{B}}\right)\hat{a}_{\vec{B}} = \frac{8}{9}(\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z)$$
$$= 0.89\hat{a}_x + 1.78\hat{a}_y - 1.78\hat{a}_z$$

<u>ตอบ</u> $0.89\hat{a}_x + 1.78\hat{a}_y - 1.78\hat{a}_z$

1.8 สนามสเกลาร์และสนามเวกเตอร์ (Scalar and Vector Field)

สนามเวกเตอร์ (Vector Field) หมายถึง การระบุค่าเวกเตอร์ให้กับทุกๆ จุดใน อาณาบริเวณที่พิจารณา เช่นเดียวกับ สนามสเกลาร์ (Scalar Field) ซึ่งเป็นการระบุค่าสเกลาร์ให้กับทุกๆ จุดในอาณาบริเวณ เช่น อุณหภูมิของน้ำในสระ เป็นสนามสเกลาร์ โดยเป็นการระบุค่าอุณหภูมิ ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ให้กับแต่ละตำแหน่ง ส่วนการไหลของน้ำในสระนั้นเป็นสนามเวกเตอร์ เนื่องจากการไหลของน้ำที่แต่ละจุดนั้นจะถูกระบุด้วย เวกเตอร์ความเร็วของน้ำ

ตัวอย่างสนามสเกลาร์

กำหนด $F = 6xy^2z$ หมายถึง F เป็นสนามสเกลาร์ที่แปรค่าตามค่า x, y, และ z เช่น ถ้าจุดหนึ่งอยู่ในอาณาบริเวณที่พิจารณาสนามสเกลาร์ F โดยจุดดังกล่าวมีค่า $x=1,\ y=2, z=1$ จะได้ $F(1,2,1) = (6)(1)(2^2)(1) = 24$ หรือที่จุด $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$ จะได้ $F(2,1,3) = (6)(2)(1^2)(3) = 36$

ตัวอย่างสนามเวกเตอร์

กำหนด $\vec{A} = 2xy\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + 3y\hat{a}_z$ หมายถึง $\vec{A}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใดๆที่มีส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ (Vector component) เป็น $\vec{A}_x = 2xy\hat{a}_x$, $\vec{A}_y = xyz\hat{a}_y$, $\vec{A}_z = 3y\hat{a}_z$ หรืออาจเขียนในรูปทั่วไปเป็น

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \qquad (1.25)$$

หรือ

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (1.26)$$

และ $\vec{A}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใดๆ ที่มีส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ (Scalar component) เป็น $A_x = 2xy$, $A_y = xyz$, $A_z = 3y$ จะเห็นว่าเมื่อจุดพิกัดเปลี่ยนตำแหน่งไป (ค่า x, y, z เปลี่ยนไป) ปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A}$ จะเปลี่ยนไปด้วย

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดสนามสเกลาร์เป็น $F(x,y,z) = 4x^2yz$ จงหาค่าสเกลาร์ดังกล่าวนี้ที่จุด $x=1,\ y=2,\ z=1$

วิธีทำ

$$F(1,2,1) = 4(1)^2(2)(1) = 8$$

ตอบ 8

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดสนามเวกเตอร์เป็น $\bar{A} = 2xy\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + 3y\hat{a}_z$ จงหาค่าของเวกเตอร์นี้ที่จุด $x=1,\ y=2,\ z=1$

วิธีทำ

$$\bar{A}(1,2,1) = 2(1)(2)\hat{a}_x + (1)(2)(1)\hat{a}_y + 3(2)\hat{a}_z$$

$$= 4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$$

ตอบ $4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 6\hat{a}_z$

1.9 ขนาดเวกเตอร์และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1.9.1 ขนาด (Magnitude) หรือค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของเวกเตอร์

ใช้สัญลักษณ์ $|\bar{A}|$ หรือ A

$$|\bar{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1.27)$$

1.9.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\bar{A}$ มีนิยามเป็น

$$\hat{a}_A = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \qquad (1.28)$$

ตัวอย่างที่ 1.12 $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากโดยที่ $\bar{A} = 3xy\hat{a}_x + 6z\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$ จงหา

ก) ขนาดของ $\bar{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

ข) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวทิศทางของ $\vec{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

ก) ขนาดของ $\vec{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

วิธีทำ

ที่จุด $P(2,-1,1)$

$$\vec{A}_P = 3(2)(-1)\hat{a}_x + 6(1)\hat{a}$$

$$= -6\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 6\hat{a}_z$$

ขนาดของ $\vec{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

$$\left|\vec{A}_P\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{36+36+36}$$

$$= \sqrt{108}$$

$$= 10.39$$

ตอบ 10.39

ข) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวทิศทางของ $\vec{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

วิธีทำ

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวทิศทางของ $\vec{A}$ ที่จุด $P(2,-1,1)$

$$\hat{a}_{\vec{A}P} = \frac{\vec{A}_P}{\left|\vec{A}_P\right|}$$

$$= \frac{-6\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 6\hat{a}_z}{\sqrt{108}}$$

$$= \frac{-6\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 6\hat{a}_z}{6\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_y - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_z$$

ตอบ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_y - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_z$

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 1

1. ปริมาณเวกเตอร์แตกต่างจากปริมาณสเกลลาร์อย่างไร
2. กำหนด $\vec{A} = 6\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$ จงหาส่วนประกอบเชิงสเกลาร์และเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{A}$
3. กำหนด $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$ และ $\vec{B} = -\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ จงคำนวณหา
   ก) $\vec{A} + \vec{B}$
   ข) $\vec{B} + \vec{A}$
   ค) $\vec{A} - \vec{B}$
   ง) $\vec{B} - \vec{A}$
   จ) $\frac{1}{5}(\vec{A} + \vec{B})$
4. กำหนด $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$ และ $\vec{B} = -\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$
   ก) จงคำนวณหา $\vec{A} \cdot \vec{B}$ และ $\vec{B} \cdot \vec{A}$
   ข) จงคำนวณหา $\vec{A} \times \vec{B}$ และ $\vec{B} \times \vec{A}$
   ค) จงคำนวณหา ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ของ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B}$
   ง) จงคำนวณหา ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B}$
   จ) จงคำนวณหาขนาดและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{A}$
5. สนามสเกลาร์แตกต่างจากสนามเวกเตอร์อย่างไร

☺☺☺☺☺