หน่วยที่ 7
สนามแม่เหล็กสถิต

7.1 บทนำ

สนามแม่เหล็กสถิตอาจเกิดจากแม่เหล็กถาวร หรือการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าอย่างเชิงเส้นตามเวลา หรืออาจเกิดจากกระแสไฟฟ้าตรง ในที่นี้จะไม่พิจารณาสนามจากแม่เหล็กถาวร และไม่คำนึงถึงสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปตามเวลา แต่จะพิจารณาความสัมพันธ์เกี่ยวกับสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากเส้นลวดตัวนำในสูญญากาศเท่านั้น

7.2 กฎบิโอท์ – ซาวาร์ท (Biot – Savart Law)

พิจารณารูปที่ 7.1 กำหนดกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำขนาดเล็กมากๆ ถ้าพิจารณากระแส I ในเส้นลวดส่วนเล็กๆ $d\bar{L}$ กฎบิโอท์ – ซาวาร์ท กล่าวว่า

ที่จุด P ใดๆ ค่าความเข้มสนามแม่เหล็ก ($d\bar{H}$) ที่เกิดขึ้นจากกระแสส่วนย่อยๆนี้ จะมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของกระแสกับขนาดความยาวเส้นลวดส่วนเล็กๆ และกับค่าไซน์ (sine) ของมุมระหว่างเส้นลวดตัวนำกับเส้นตรง ที่ลากจากเส้นลวดตัวนำไปยังจุด P และขนาดของสนามแม่เหล็กนี้ยังเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางระหว่างเส้นลวดตัวนำกับจุด P ยกกำลังสอง ส่วนทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็กจะเป็นทิศที่ตั้งฉากกับระนาบของเส้นลวดส่วนเล็กๆนั้นกับเส้นตรงที่ชี้จากเส้นลวดส่วนเล็กๆไปยังจุด P และเป็นไปตามกฎสกรูมือขวา (Right-handed screw) หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$d\bar{H} = \frac{I\,d\bar{L} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{A/m} \qquad (7.1)$$

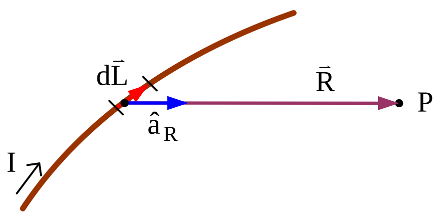
เมื่อ

$d\bar{H}$ คือค่าความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสที่ไหลในเส้นลวดส่วนเล็กๆ แบบดิฟเฟอเรนเชียล ($d\bar{L}$)

I เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลในเส้นลวด

$\hat{a}_R$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากเส้นลวดส่วนเล็กๆ ไปยังจุด P

R เป็นระยะทางจากเส้นลวดส่วนเล็กๆ ไปยังจุด P

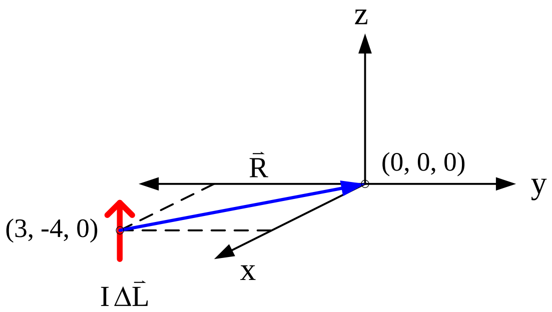


รูปที่ 7.1 แสดงสาระสำคัญของกฎบิโอท์ – ซาวาร์ท

เนื่องจากกระแส I ไหลเป็นวงรอบเสมอ จึงได้สูตรสำหรับ $\bar{H}$ ในรูปของอินทิกรัลเป็น

$$\bar{H} = \oint \frac{I\,d\bar{L} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{A/m} \qquad (7.2)$$

ตัวอย่างที่ 7.1 จากรูปที่ 7.2 ให้หา $\Delta\vec{H}$ ที่จุดกำเนิดที่เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสในอวกาศว่าง $I\Delta\vec{L} = 3\pi\hat{a}_z$ $\mu A \cdot m$ ที่อยู่ที่จุด (3, -4, 0)



รูปที่ 7.2 สำหรับตัวอย่างที่ 7.1

<u>**วิธีทำ**</u>

$$\vec{R} = (0-3)\hat{a}_x + (0+4)\hat{a}_y + (0-0)\hat{a}_z$$

$$= -3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$

$$= 5$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$= \frac{-3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y}{5}$$

$$= -0.6\hat{a}_x + 0.8\hat{a}_y$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{I\Delta\vec{L} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$= \frac{3\pi \times 10^{-6}\hat{a}_z \times \left(-0.6\hat{a}_x + 0.8\hat{a}_y\right)}{(4\pi)(5^2)}$$

เมื่อ $\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$ และ $\hat{a}_z \times \hat{a}_y = -\hat{a}_x$ จะได้

$$\Delta\vec{H} = \frac{3\pi \times 10^{-6}\left(-0.6\hat{a}_y - 0.8\hat{a}_x\right)}{100\pi}$$

$$\Delta\bar{H} = -0.024\times10^{-6}\,\hat{a}_x - 0.018\times10^{-6}\,\hat{a}_y$$

$$= -24\hat{a}_x - 18\hat{a}_y \qquad \text{nA/m}$$

<u>ตอบ</u> $-24\hat{a}_x - 18\hat{a}_y$ nA/m

7.3 กฎวงจรของแอมแปร์ (Ampere's Circuital Law)

กฎวงจรของแอมแปร์มีใจความว่า ค่าอินทิกรัลเชิงเส้น (line integral) ของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\bar{H}$ ตามเส้นวงปิด (closed path) ใดๆ จะเท่ากับค่ากระแสที่ถูกล้อมรอบโดยเส้นทางปิดนั้น

เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\oint \bar{H}\cdot d\bar{L} = I_{enclosed} \tag{7.3}$$

เมื่อ

$\bar{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก หน่วยเป็นแอมแปร์ต่อเมตร (A/m)

$I_{enclosed}$ คือกระแสที่ถูกล้อมรอบโดยเส้นทางปิด มีหน่วยเป็นแอมแปร์ (A)

ข้อสังเกตสำหรับกฎของแอมแปร์

1. กระแส $I_{enclosed}$ จะมีค่าเป็นบวกถ้าสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสนี้มีทิศการวนเป็นอย่างเดียวกันกับทิศทางการอินทิเกรตตามเส้นวงปิด และกระแส $I_{enclosed}$ จะมีค่าเป็นลบถ้าทิศทางการวนของสนามแม่เหล็กและทิศทางการอินทิเกรตสวนกัน
2. กฎวงจรของแอมแปร์เหมาะที่จะใช้หาค่าความเข้มของสนามแม่เหล็ก $\bar{H}$ จากกระแส $I_{enclosed}$ ในปัญหาที่มีสมมาตรทางเรขาคณิตแบบใดแบบหนึ่ง และเลือกใช้เส้นทางสำหรับการอินทิเกรตให้มีคุณสมบัติที่เหมาะสม 2 ข้อ คือ
   ก. ทิศทางของ $\bar{H}$ ที่ทุก ๆ จุดบนเส้นทางที่ใช้ต้องอยู่ในแนวที่สัมผัสหรือตั้งฉากกับเส้นทางดังกล่าว
   ข. ขนาดของส่วนประกอบของ $\bar{H}$ ในแนวที่สัมผัสกับเส้นทางที่ใช้ต้องมีค่าคงตัวตลอดเส้นทางดังกล่าว

จากกฎวงจรของแอมแปร์ในรูปแบบอินทิกรัลดังแสดงในสมการ (7.3) ถ้าใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ ดังนี้

$$\oint \bar{H}\cdot d\bar{L} = \int_S (\nabla\times\bar{H})\cdot d\bar{S} \tag{7.4}$$

และใช้ความสัมพันธ์

$$I_{enclosed} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad (7.5)$$

จะได้

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (7.6)$$

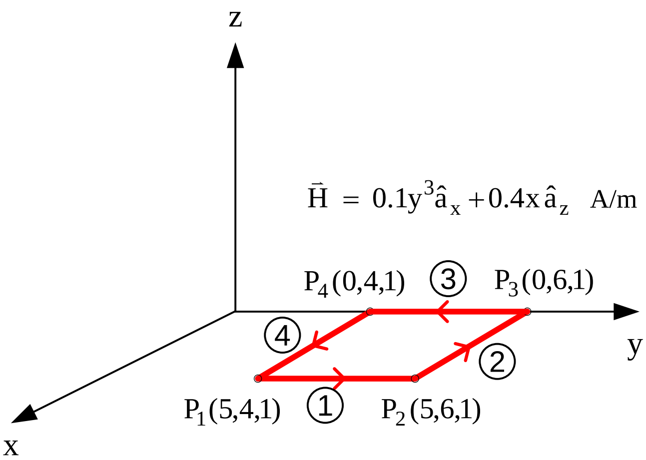
สมการ (7.6) เป็นกฎวงจรของแอมแปร์ในรูปแบบชนิดจุด และเป็นหนึ่งในสมการของแมกซ์เวลล์ในรูปแบบจุด (point form)

ตัวอย่างที่ 7.2 กำหนดสนามแม่เหล็กเป็น $\vec{H} = 0.1y^3\hat{a}_x + 0.4x\hat{a}_z$ A/m จงหาการอินทิเกรตเส้นปิดของ $\vec{H}$ จาก $P_1(5, 4, 1)$ ไปยัง $P_2(5, 6, 1)$ ไปยัง $P_3(0, 6, 1)$ ไปยัง $P_4(0, 4, 1)$ ไปยัง P_1 ในแนวเส้นตรง ดังแสดงในรูปที่ 7.3

<u>วิธีทำ</u>

$$d\vec{L} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_1 \vec{H} \cdot d\vec{L}_1 + \int_2 \vec{H} \cdot d\vec{L}_2 + \int_3 \vec{H} \cdot d\vec{L}_3 + \int_4 \vec{H} \cdot d\vec{L}_4$$



รูปที่ 7.3 แสดงเส้นทางอินทิเกรตเส้นปิดของ $\vec{H}$

ด้านที่ 1 : $dL_1 = dy\,\hat{a}_y$

$$\int_1 \vec{H} \cdot dL_1 = \int_{y=4}^{6} \left(0.1y^3\hat{a}_x + 0.4x\,\hat{a}_z\right) \cdot dy\hat{a}_y$$

$$\int_1 \vec{H}\cdot dL_1 = \int_{y=4}^{6} 0dy$$

$$= 0 \qquad A$$

ด้านที่ 2 : $dL_2 = dx\,\hat{a}_x,\ y = 6,\ z = 1$

$$\int_2 \vec{H}\cdot dL_2 = \int_{x=5}^{0}\left(0.1y^3\hat{a}_x + 0.4x\,\hat{a}_z\right)\cdot dx\hat{a}_x$$

$$= 0.1\int_{x=5}^{0} y^3 dx$$

$$= 0.1\int_{x=5}^{0} 6^3 dx$$

$$= 21.6\left(x\big|_5^0\right)$$

$$= 21.6(-5)$$

$$= -108 \qquad A$$

ด้านที่ 3 : $dL_3 = dy\,\hat{a}_y$

$$\int_3 \vec{H}\cdot dL_3 = \int_{y=6}^{4}\left(0.1y^3\hat{a}_x + 0.4x\,\hat{a}_z\right)\cdot dy\hat{a}_y$$

$$= \int_{y=6}^{4} 0dy$$

$$= 0$$

ด้านที่ 4 : $dL_4 = dx\,\hat{a}_x,\ y = 4,\ z = 1$

$$\int_4 \vec{H}\cdot dL_4 = \int_{x=0}^{5}\left(0.1y^3\hat{a}_x + 0.4x\,\hat{a}_z\right)\cdot dx\hat{a}_x$$

$$= 0.1\int_{x=0}^{5} y^3 dx$$

$$= 0.1\int_{x=0}^{5} 4^3 dx$$

$$= 6.4\left(x\big|_0^5\right)$$

$$= 6.4(5)$$

$$\int_4 \vec{H}\cdot dL_4 = 32 \qquad A$$

ดังนั้น

$$\oint \vec{H}\cdot d\bar{L} = 0 - 108 + 0 + 32$$

$$= -76 \qquad \text{A}$$

<u>ตอบ</u> -76 A

7.4 สนามแม่เหล็กเนื่องจากกระแสในเส้นลวดที่มีความยาวเป็นอนันต์

โดยการใช้กฎบิโอท์ – ซาวาร์ท หรือกฎวงจรของแอมแปร์ สามารถหาสูตรสำหรับความเข้มของสนามแม่เหล็กเนื่องจากกระแสในเส้นลวดตัวนำที่มีความยาวเป็นอนันต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.3 ได้ดังนี้

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi \qquad \text{A/m} \qquad (7.7)$$

เมื่อ

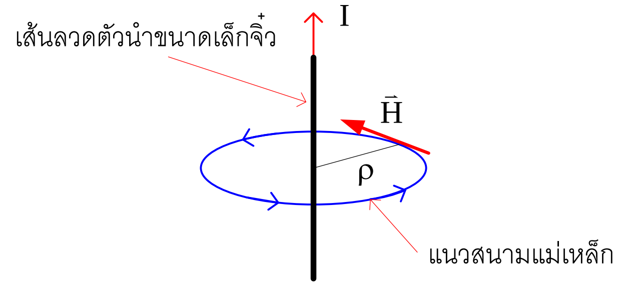
$\bar{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก (A/m)

I คือกระแสที่ไหลในเส้นลวดตัวนำ (A)

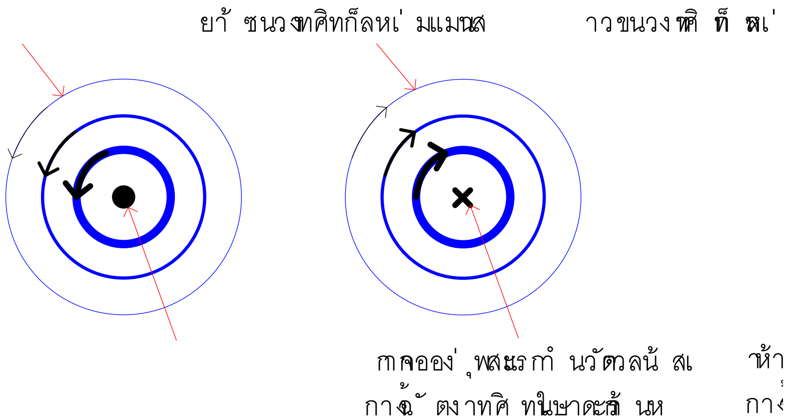
ρ คือระยะทางจากเส้นลวดตัวนำไปยังจุดในแนวสนามแม่เหล็ก (m)

$\hat{a}_\phi$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่แสดงทิศทางของมุม ϕ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อพิจารณาสมการที่ (7.7) ขนาดของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\bar{H}$ จะแปรผันโดยตรงกับกระแส I และแปรผกผันกับระยะทาง ρ โดยทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\bar{H}$ เป็นไปตามระบบสกรูเกลียวขวา กล่าวคือถ้ากระแสไหลในทิศทาง $\hat{a}_z$ ทิศทางของ $\bar{H}$ จะวนซ้าย หรือไปตามทิศทาง $\hat{a}_\phi$ และถ้ากระแสไหลในทิศทาง $-\hat{a}_z$ ทิศทางของ $\bar{H}$ จะวนขวา หรือไปตามทิศทาง $-\hat{a}_\phi$ ดังเช่นแสดงในรูปที่ 7.5 (ก) สมมุติว่ากระแสในเส้นลวดตัวนำไหลในทิศทางพุ่งออกตั้งฉากกับหน้ากระดาษ จะได้ทิศทางสนามแม่เหล็กทิศทางวนซ้าย และรูปที่ 7.5 (ข) กระแสในเส้นลวดตัวนำไหลในทิศทางพุ่งเข้าตั้งฉากกับหน้ากระดาษ จะได้ทิศทางสนามแม่เหล็กทิศทางวนขวา



รูปที่ 7.4 สนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำขนาดเล็กจิ๋วและยาวเป็นอนันต์



(ก) (ข)

รูปที่ 7.5 แสดงทิศทางสนามแม่เหล็กเมื่อมีกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำ

ตัวอย่างที่ 7.3 เส้นลวดตัวนำขนาดเล็กมาก ๆ ความยาวเป็นอนันต์วางอยู่บนแกน z มีกระแสไฟฟ้า I = 75 mA ไหลผ่านในทิศทาง $\hat{a}_z$ จงหาความเข้มสนามแม่เหล็ก

ก) ที่จุดใด ๆ ในแนวเส้นรอบวงกลมห่างจากแกน z เป็นระยะทาง 8 มม.

ข) ที่จุด P(0, 8, 0) มม. ในพิกัดทรงเหลี่ยม

ก) ที่จุดใด ๆ ในแนวเส้นรอบวงกลมห่างจากแกน z เป็นระยะทาง 8 มม.

__วิธีทำ__

เนื่องจากสนามแม่เหล็กที่เกิดจากเส้นลวดกระแสจะมีทิศตาม $\hat{a}_\phi$ และเป็นไปตามกฎสกรูเกลียวขวาในระบบพิกัดทรงกระบอก ซึ่งในที่นี้ $\rho = 8$ มม. จะได้

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi$$

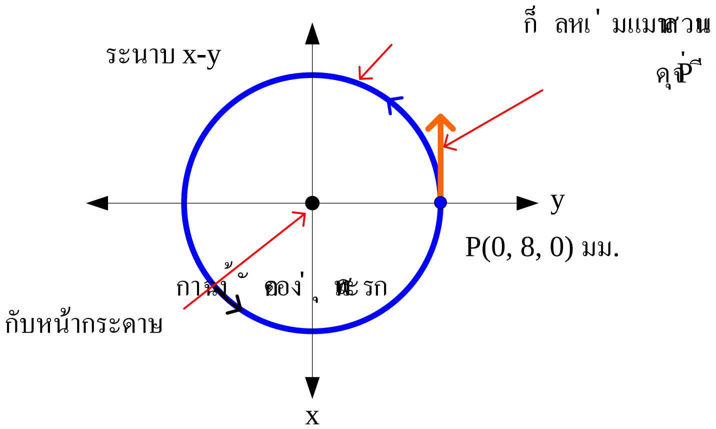
$$\bar{H} = \frac{75\times10^{-3}}{(2\pi)(8\times10^{-3})}\hat{a}_{\phi}$$

$$\bar{H} = 1.49\hat{a}_{\phi} \qquad \text{A/m}$$

<u>ตอบ</u> $1.49\hat{a}_{\phi}$ A/m

ข) ที่จุด P(0, 8, 0) มม. ในพิกัดทรงเหลี่ยม

<u>วิธีทำ</u> เส้นลวดกระแสที่แกน z ไหลในทิศทาง $\hat{a}_z$ จะทำให้สนามแม่เหล็กที่จุด P(0, 8, 0) มีทิศทาง $-\hat{a}_x$ ดังแสดงในรูปที่ 7.6 ดังนั้น



รูปที่ 7.6 แสดงทิศทางสนามแม่เหล็กที่จุด P(0, 8, 0) มม.

$$\bar{H} = -\frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_x$$

$$= -\frac{75\times10^{-3}}{(2\pi)(8\times10^{-3})}\hat{a}_x$$

$$= -1.49\hat{a}_x \qquad \text{A/m}$$

<u>ตอบ</u> $-1.49\hat{a}_x$ A/m

7.5 ฟลักซ์แม่เหล็กและความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก

ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\bar{H}$ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น จะมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density) $\bar{B}$ ตามสมการ

$$\bar{B} = \mu_0\bar{H} \qquad \text{Wb/m}^2 \text{ หรือ T} \qquad (7.8)$$

เมื่อ

$\bar{B}$ คือความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก

μ_0 คือค่าเพอร์มีบีลิตี (permeability) ของอวกาศว่าง และ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

ถ้าพิจารณาฟลักซ์แม่เหล็ก Φ ที่ผ่านพื้นผิว S ใด ๆ จะคำนวณได้จากความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $\bar{B}$ ดังนี้

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad \text{Wb} \tag{7.9}$$

<u>**ข้อสังเกต**</u>

สมการ $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ และ $\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$ สำหรับสนามแม่เหล็ก มีความคล้ายคลึงกับสมการ $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$ และ $\Psi = \int_S \bar{D} \cdot d\bar{S}$ สำหรับสนามไฟฟ้าตามลำดับ แต่อย่างไรก็ตาม เส้นแรงของสนามทั้งสองมีข้อที่แตกต่างกันอย่างหนึ่งคือ เส้นแรงของสนามไฟฟ้าสถิตจะเริ่มต้นที่ประจุบวกและไปสิ้นสุดที่ประจุลบเสมอ ส่วนเส้นแรงสนามแม่เหล็กสถิตจะวนรอบเป็นวงปิด ไม่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเหมือนกับเส้นแรงของสนามไฟฟ้า เมื่อเป็นเช่นนี้จึงพบว่า ถ้าพิจารณาผิวปิดหนึ่ง จำนวนเส้นฟลักซ์แม่เหล็กที่เข้าสู่ผิวปิดนั้นจะเท่ากับจำนวนเส้นฟลักซ์แม่เหล็กที่ออกจากผิวปิดนั้นเสมอ นั่นคือทุก ๆ ผิวปิด S จะได้

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \tag{7.10}$$

ซึ่งสมการ (7.10) นี้ได้ชื่อว่า “กฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็ก” และเมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์เข้ากับข้างซ้ายของสมการ (7.10) ดังนี้

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_V (\nabla \cdot \bar{B}) dv = 0 \tag{7.11}$$

ดังนั้นจะได้

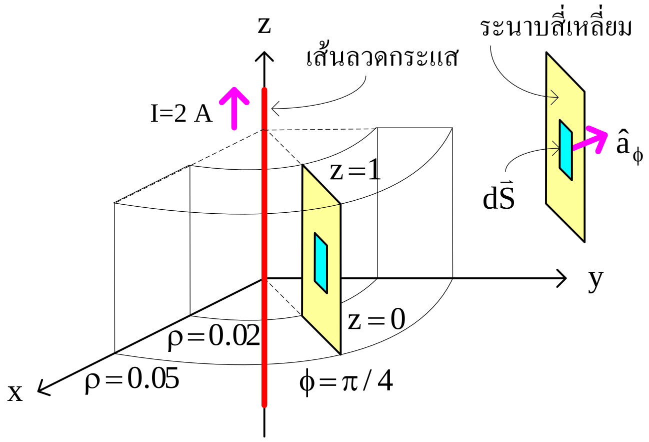
$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{7.12}$$

ซึ่งสมการที่ (7.12) เป็นหนึ่งในสี่สมการของแมกซ์เวลล์ในรูปแบบจุด (point form)

ตัวอย่างที่ 7.4 เส้นลวดตัวนำขนาดเล็กจิ๋วยาวเป็นอนันต์วางตัวบนแกน z ในอวกาศว่าง มีกระแสขนาด 2 A ไหลในทิศทาง $\hat{a}_z$ จงหา

ก) สนามแม่เหล็ก $(\bar{H})$ และความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $(\bar{B})$ รอบเส้นลวดตัวนำ

ข) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) บนพื้นผิวสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $\phi = \pi/4$ ของรูปทรงกระบอกที่มี $\rho = 2$ ซม. และ $\rho = 5$ ซม. กับระนาบ $z = 0$ และ $z = 1$ เมตร



รูปที่ 7.7 แสดงทิศทางของกระแสและระนาบสี่เหลี่ยม

ก) สนามแม่เหล็ก ($\vec{H}$) และความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก ($\vec{B}$) รอบเส้นลวดตัวนำ

<u>วิธีทำ</u>

สนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสในเส้นลวดตัวนำยาวเป็นอนันต์จะมีค่า

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi \qquad \text{A/m}$$

หรือ

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad \text{A/m}$$

ดังนั้น

$$\vec{H} = \frac{2}{2\pi\rho}\hat{a}_\phi$$

$$= \frac{1}{\pi\rho}\hat{a}_\phi \qquad \text{A/m}$$

และ

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \qquad \text{Wb/m}^2$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi\rho}\hat{a}_\phi \qquad \text{Wb/m}^2$$

<u>ตอบ</u> $\vec{H} = \frac{1}{\pi\rho}\hat{a}_\phi$ A/m , $\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi\rho}\hat{a}_\phi$ Wb/m^2

ข) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) บนพื้นผิวสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $\phi = \pi/4$ ของรูปทรงกระบอกที่มี $\rho = 2$ ซม. และ $\rho = 5$ ซม. กับระนาบ $z = 0$ และ $z = 1$ เมตร

<u>วิธีทำ</u>

จากรูปที่ 7.7 $d\vec{S}$ บนระนาบผิวสี่เหลี่ยมจะมีค่าเป็น

$$d\vec{S} = d\rho dz\,\hat{a}_\phi$$

และ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi\rho}\hat{a}_\phi$$

จะได้

$$\vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{\pi\rho}d\rho dz$$

ดังนั้นจะได้ฟลักซ์แม่เหล็ก

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \\
&= \int_{z=0}^{1}\int_{\rho=0.02}^{0.05}\frac{\mu_0}{\pi\rho}d\rho dz \\
&= \int_{\rho=0.02}^{0.05}\frac{\mu_0}{\pi\rho}d\rho\left(z\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{\mu_0}{\pi}\int_{\rho=0.02}^{0.05}\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \frac{\mu_0}{\pi}\ln\rho\Big|_{0.02}^{0.05} \\
&= \frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln 0.05 - \ln 0..02\right) \\
&= \frac{4\pi\times 10^{-7}}{\pi}(0.916) \\
&= 0.366\times 10^{-6} \quad \text{Wb} \\
&= 0.366 \quad \mu\text{Wb}
\end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> 0.366 μWb

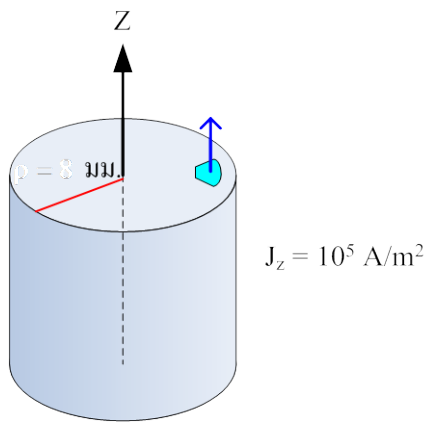
ตัวอย่างที่ 7.5 เส้นลวดตัวนำยาวเป็นอนันต์ รัศมี $\rho = 8$ mm. จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน z เส้นลวดนี้มีกระแสที่มีความหนาแน่น 10^5 A/m^2 ไหลผ่านในทิศทาง $\hat{a}_z$ จงหา

ก) สนามแม่เหล็ก $(\vec{H})$ และความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $(\vec{B})$ ในช่วง $0<\rho<8$ มม.

ข) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) ที่อาณาบริเวณ $z = 0,\ 0.2<\rho<8$ มม. , $\pi<\phi<2\pi$

ค) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) ที่อาณาบริเวณ $\phi=0$, $0<\rho<0.008$, $0<z<0.01$

ก) สนามแม่เหล็ก $(\vec{H})$ และความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $(\vec{B})$ ในช่วง $0<\rho<8$ มม.



รูปที่ 7.8 แสดงเส้นลวดตัวนำและพื้นที่หน้าตัดขวาง

<u>วิธีทำ</u> เมื่อเส้นลวดตัวนำมีจุดศูนย์กลางของเส้นลวดอยู่ที่แกน z กระแสที่ไหลในเส้นลวดและมีทิศทาง $\hat{a}_z$ จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กในทิศทาง $\hat{a}_\phi$ หรือได้สนามแม่เหล็กเฉพาะส่วนประกอบ H_ϕ (พิจารณาได้จากรูปที่ 7.5 ก) ดังนั้นจะได้

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

โดยที่

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S} = \rho d\rho d\phi \hat{a}_z$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนั้นจะได้ปริมาณกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำดังนี้

$$I = \int_S J_z \hat{a}_z \cdot \rho d\rho d\phi \hat{a}_z$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} J_z \rho d\rho d\phi$$

$$I = J_z(2\pi)\left(\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{\rho}\right)$$

$$= J_z\pi\rho^2 \qquad \text{A}$$

จาก

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$2\pi\rho H_\phi = I$$

$$2\pi\rho H_\phi = J_z\pi\rho^2$$

$$H_\phi = \frac{J_z\rho}{2}$$

$$= \frac{10^5\rho}{2}$$

$$= 50{,}000\rho \qquad \text{A/m}$$

หรือ

$$\vec{H} = 50{,}000\rho\,\hat{a}_\phi \qquad \text{A/m}$$

และ

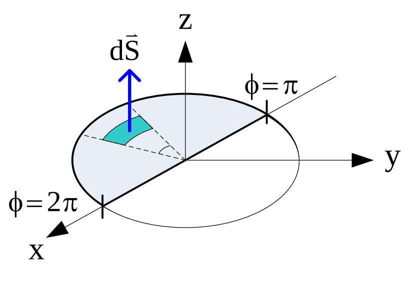
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

$$= (4\pi\times10^{-7})(50{,}000)\rho\,\hat{a}_\phi$$

$$= 0.0628\rho\,\hat{a}_\phi \qquad \text{T}$$

<u>ตอบ</u> $50{,}000\rho\,\hat{a}_\phi$ A/m , $0.0628\rho\,\hat{a}_\phi$ T

ข) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) ที่อาณาบริเวณ $z = 0$, $0.2 < \rho < 8$ มม. , $\pi < \phi < 2\pi$



รูปที่ 7.9 แสดงบริเวณคำนวณหาฟลักซ์แม่เหล็ก

วิธีทำ พื้นที่หน้าตัดของเส้นลวดตัวนำเป็นพื้นที่วงกลม $d\vec{S} = \rho d\rho d\phi \hat{a}_z$

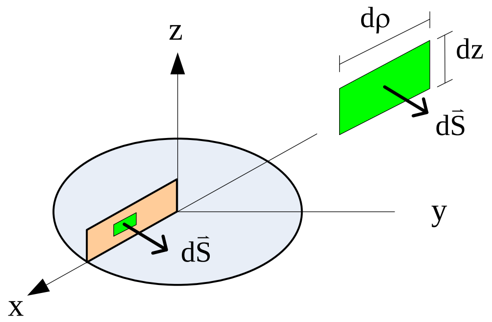
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0.0002}^{0.008} B_z \rho d\rho d\phi$$

$$= 0 \quad \text{Wb} \qquad (\text{เนื่องจาก } B_z = 0)$$

ตอบ 0 Wb

ค) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) ที่อาณาบริเวณ $\phi = 0$, $0 < \rho < 0.008$, $0 < z < 0.01$



รูปที่ 7.10 แสดงบริเวณคำนวณหาฟลักซ์แม่เหล็กและ $d\vec{S}$ ซึ่งมีทิศทางเป็น $\hat{a}_\phi$

วิธีทำ

จากรูปที่ 7.10 จะได้ $d\vec{S} = d\rho dz\, \hat{a}_\phi$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_S B_\phi dS$$

$$= \int_0^{0.01} \int_0^{0.008} 0.0628 \rho d\rho dz$$

$$= 0.0628 \left(\left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{0.008} \right) \left(z \Big|_0^{0.01} \right)$$

$$= 0.0314 \left(0.008^2 \right) (0.01)$$

$$= 2.01 \times 10^{-8} \quad \text{Wb}$$

ตอบ 2.01×10^{-8} Wb

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 7

1. กฎบิโอท์ซาวาร์ทเขียนออกมาเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร
2. กฎวงจรของแอมแปร์เขียนออกมาเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร
3. ให้หา $\Delta\bar{H}$ ที่จุดกำเนิดที่เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสในเส้นลวดขนาดเล็กจิ๋วที่วางตัวขนานกับแกน z ในอวกาศว่างและที่อยู่ที่จุด (2, 3, 0) m มีกระแส $I\Delta\bar{L} = 5\pi\hat{a}_z$ $\mu A \cdot m$
4. กำหนดสนามแม่เหล็กเป็น $\bar{H} = 0.5z^2\hat{a}_x$ A/m จงหาการอินทิเกรตเส้นปิดของ $\bar{H}$ จาก $P_1(0, 0, 0)$ ไปยัง $P_2(0, 0, 1)$ ไปยัง $P_3(1, 0, 1)$ ไปยัง $P_4(1, 0, 0)$ ไปยัง P_1 ในแนวเส้นตรง
5. เส้นลวดตัวนำขนาดเล็กจิ๋วยาวเป็นอนันต์วางตัวบนแกน z ในอวกาศว่าง มีกระแสขนาด 2 A ไหลในทิศทาง $-\hat{a}_z$ จงหา
   ก) สนามแม่เหล็ก $(\bar{H})$ และความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $(\bar{B})$ รอบเส้นลวดตัวนำ
   ข) ฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ) บนพื้นผิวสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $\phi = \pi/4$ ของรูปทรงกระบอกที่มี $\rho = 2$ ซม. และ $\rho = 3$ ซม. กับระนาบ $z = 0$ และ $z = 1$ เมตร

☺☺☺☺☺