หน่วยที่ 3
การแปลงระบบพิกัด

3.1 บทนำ

การแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์เป็นการแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์จากระบบพิกัดหนึ่งไปเป็นอีกระบบพิกัดหนึ่ง จะแบ่งเป็นสองรูปแบบคือ แบบที่หนึ่งเป็นการแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์ระหว่างระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับทรงกระบอก แบบที่สองปีนการแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์ระหว่างระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับทรงกลม การแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์ดำเนินการได้ด้วยการนิยามเวกเตอร์นั้นๆในระบบพิกัดใหม่ เช่นถ้าแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก ก็ให้นิยามเวกเตอร์นั้นใหม่ในระบบพิกัดทรงกระบอก หรือในทำนองกลับกัน ถ้าต้องการแปลงเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกระบอกกลับไปเป็นเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ก็ให้นิยามเวกเตอร์นั้นใหม่ด้วยระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ดังนั้นด้วยหลักการดังกล่าวข้างต้นการแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดจึงต้องดำเนินการสองขั้นตอนคือ หนึ่งการแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ของเวกเตอร์ และอีกหนึ่งคือการแปลงระบบตัวแปร

3.2 การแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกระบอก

การแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้าเป็นการแปลงเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเป็นเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกระบอก จะต้องนิยามเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมให้อยู่ในระบบพิกัดใหม่คือพิกัดทรงกระบอก ซึ่งจะต้องดำเนินการหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์และตัวแปรในระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้าเป็นการแปลงเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม จะต้องนิยามเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกระบอกให้อยู่ในระบบพิกัดใหม่คือพิกัดทรงเหลี่ยม ซึ่งจะต้องดำเนินการหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์และตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

3.2.1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกระบอก

การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกระบอกจะพิจารณาแบ่งออกเป็นสองหัวข้อคือ หัวข้อแรกเป็นการแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมไปเป็นส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก หัวข้อที่สองเป็นการแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกไปเป็นส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ซึ่งทั้งสองแบบนั้นจะใช้หลักการของผลคูณชนิดสเกลาร์ (Dot product) ของเวกเตอร์ ดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไปนี้

3.2.1.1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก

กำหนดให้ $\bar{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ถ้าเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้ดังนี้

$$\bar{A} = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z \tag{3.1}$$

โดยที่ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์เป็นดังต่อไปนี้

$$A_\rho = \bar{A}\cdot\hat{a}_\rho \tag{3.2}$$

$$A_\phi = \bar{A}\cdot\hat{a}_\phi \tag{3.3}$$

$$A_z = \bar{A}\cdot\hat{a}_z \tag{3.4}$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_ρ

$$A_\rho = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\rho$$

$$A_\rho = A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\rho + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\rho + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\rho \qquad (3.5)$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \qquad (3.6)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_ϕ

$$A_\phi = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\phi$$

$$A_\phi = A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\phi + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\phi \qquad (3.7)$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \qquad (3.8)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_z

$$A_z = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_z$$

$$A_z = A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_z + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_z + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z$$

$$A_z = A_z \qquad (3.9)$$

3.2.1.2 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

กำหนดให้ $\bar{A} = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้าเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมจะได้ดังนี้

$$\bar{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (3.10)$$

โดยที่ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์เป็นดังต่อไปนี้

$$A_x = \bar{A}\cdot\hat{a}_x \qquad (3.11)$$

$$A_y = \bar{A}\cdot\hat{a}_y \qquad (3.12)$$

$$A_z = \bar{A}\cdot\hat{a}_z \qquad (3.13)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_x

$$
\begin{aligned}
A_x &= (A_\rho \hat{a}_\rho + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x \\
&= A_\rho \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_x + A_\phi \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$A_x = A_\rho \cos\phi - A_\phi \sin\phi \qquad (3.15)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_y

$$
\begin{aligned}
A_y &= (A_\rho \hat{a}_\rho + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_y \\
A_y &= A_\rho \hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_y + A_\phi \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_y \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$A_y = A_\rho \sin\phi + A_\phi \cos\phi \qquad (3.17)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_z

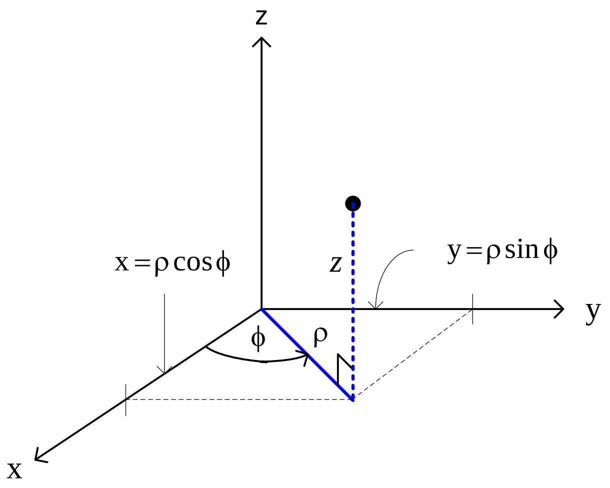
$$
\begin{aligned}
A_z &= (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_z \\
A_z &= A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z \\
A_z &= A_z \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 3.1 ผลคูณชนิดจุดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบทรงเหลี่ยมและทรงกระบอก

dot	$\hat{a}_\rho$	$\hat{a}_\phi$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_x$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\hat{a}_y$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\hat{a}_z$	0	0	1

3.2.2 การแปลงตัวแปรระหว่างระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกระบอก

จากรูปที่ 3.1 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกระบอก จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้



รูปที่ 3.1 ตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกระบอก

$$x = \rho\cos\phi \tag{3.19}$$

$$y = \rho\sin\phi \tag{3.20}$$

$$z = z \tag{3.21}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3.22}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.23}$$

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.24}$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.25}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงแปลงเวกเตอร์ $\vec{B} = y\hat{a}_x - x\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ ให้เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นที่ 1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ (ใช้ข้อมูลจากตารางที่ 3.1)

$$B_\rho = \vec{B}\cdot\hat{a}_\rho$$

$$B_\rho = y(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\rho) - x(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\rho) + z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\rho)$$

$$= y\cos\phi - x\sin\phi$$

$$B_\phi = \vec{B}\cdot\hat{a}_\phi$$

$$= y(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\phi) - x(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\phi) + z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\phi)$$

$$= -y\sin\phi - x\cos\phi$$

$$= -\rho\sin^2\phi - \rho\cos^2\phi$$

$$= -\rho$$

$$B_z = \vec{B}\cdot\hat{a}_z$$

$$= y(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_z) - x(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_z) + z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z$$

$$= z$$

ขั้นที่ 2 การแปลงตัวแปรด้วยการแทนค่า

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$z = z$$

$$B_\rho = y\cos\phi - x\sin\phi$$

$$B_\rho = \rho\sin\phi\cos\phi - \rho\cos\phi\sin\phi$$

$$B_\rho = 0$$

$$B_\phi = -y\sin\phi - x\cos\phi$$

$$= -\rho\sin^2\phi - \rho\cos^2\phi$$

$$= -\rho$$

$$B_z = z$$

<u>**ตอบ**</u> $\vec{B} = -\rho\hat{a}_\phi + z\hat{a}_z$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงแปลงเวกเตอร์ $\vec{B} = -\rho\hat{a}_\phi + z\hat{a}_z$ ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

<u>**วิธีทำ**</u>

ขั้นที่ 1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ (ใช้ข้อมูลจากตารางที่ 3.1)

$$B_x = \vec{B}\cdot\hat{a}_x$$

$$= -\rho(\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_x) + z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_x)$$

$$= \rho\sin\phi$$

$$B_y = \vec{B}\cdot\hat{a}_y$$

$$= -\rho(\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_y) + z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_y)$$

$$= -\rho\cos\phi$$

$$B_z = \vec{B}\cdot\hat{a}_z$$

$$= -\rho(\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_z) + z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z)$$

$$= z$$

ขั้นที่ 2 การแปลงตัวแปรด้วยการแทนค่า

$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$B_x = \rho \sin\phi$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= y$$

$$B_y = -\rho \cos\phi$$

$$= -\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -x$$

$$B_z = z$$

<u>ตอบ</u> $\vec{B} = y\hat{a}_x - x\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

3.3 การแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกลม

การแปลงเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกลม ถ้าเป็นการแปลงเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ไปเป็นเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกลม จะต้องนิยามเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมให้อยู่ในระบบพิกัดใหม่คือ พิกัดทรงกลม ซึ่งจะต้องดำเนินการหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์และตัวแปรในระบบพิกัดทรงกลม ถ้าเป็นการแปลงเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกลม ไปเป็นเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงเหลี่ยม จะต้องนิยามเวกเตอร์ระบบพิกัดทรงกลมให้อยู่ในระบบพิกัดใหม่คือ พิกัดทรงเหลี่ยม ซึ่งจะต้องดำเนินการหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์และตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

3.1.1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกลม

การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมกับระบบพิกัดทรงกลมจะพิจารณาแบ่งออกเป็นสองหัวข้อคือ หัวข้อแรกเป็นการแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมไปเป็นส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกลม หัวข้อที่สองเป็นการแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกลมไปเป็นส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

ซึ่งทั้งสองแบบนั้นจะใช้หลักการของผลคูณชนิดสเกลาร์ (Dot product) ของเวกเตอร์ ดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไปนี้

3.3.1.1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเป็นระบบพิกัดทรงกลม

กำหนดให้ $\bar{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม ถ้าเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงกลมจะได้ดังนี้

$$\bar{A} = A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi \tag{3.26}$$

โดยที่ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์เป็นดังต่อไปนี้

$$A_r = \bar{A}\cdot\hat{a}_r \tag{3.27}$$

$$A_\theta = \bar{A}\cdot\hat{a}_\theta \tag{3.28}$$

$$A_\phi = \bar{A}\cdot\hat{a}_\phi \tag{3.29}$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_r

$$A_r = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_r$$

$$A_r = A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_r + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_r + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_r \tag{3.30}$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \tag{3.31}$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_θ

$$A_\theta = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\theta$$

$$A_\theta = A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\theta + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\theta + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\theta \tag{3.32}$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \tag{3.33}$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_ϕ

$$A_\phi = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\phi$$

$$A_\phi \;=\; A_x\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi + A_y\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\phi \qquad (3.34)$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_\phi \;=\; -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \qquad (3.35)$$

3.3.1.2 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกลมเป็นระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

กำหนดให้ $\bar{A} \;=\; A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลม ถ้าเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมจะได้ดังนี้

$$\bar{A} \;=\; A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (3.36)$$

โดยที่ส่วนประกอบชนิดสเกลาร์เป็นดังต่อไปนี้

$$A_x \;=\; \bar{A} \cdot \hat{a}_x \qquad (3.37)$$

$$A_y \;=\; \bar{A} \cdot \hat{a}_y \qquad (3.38)$$

$$A_z \;=\; \bar{A} \cdot \hat{a}_z \qquad (3.39)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_x

$$A_x \;=\; (A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi) \cdot \hat{a}_x$$

$$A_x \;=\; A_r\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x + A_\theta\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_x + A_\phi\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x \qquad (3.40)$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_x \;=\; A_r \sin\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\cos\phi - A_z \sin\phi \qquad (3.41)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_y

$$A_y \;=\; (A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi) \cdot \hat{a}_y$$

$$A_y \;=\; A_r\hat{a}_r \cdot \hat{a}_y + A_\theta\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_y + A_\phi\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y \qquad (3.42)$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_y \;=\; A_r \sin\theta\sin\phi + A_\theta \cos\theta\sin\phi - A_\phi \cos\phi \qquad (3.43)$$

การหาส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ A_z

$$A_z = (A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi)\cdot\hat{a}_z$$

$$A_z = A_r\hat{a}_r\cdot\hat{a}_z + A_\theta\hat{a}_\theta\cdot\hat{a}_z + A_\phi\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_z \qquad (3.44)$$

จากตารางที่ 3.2 จะได้

$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \qquad (3.45)$$

ตารางที่ 3.2 ผลคูณชนิดจุดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบทรงเหลี่ยมและทรงกลม

dot	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\phi$
$\hat{a}_x$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\hat{a}_y$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\hat{a}_z$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

3.2.2 การแปลงตัวแปรระหว่างระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกลม

จากรูปที่ 3.2 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกลม จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad (3.46)$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (3.47)$$

$$z = r\cos\theta \qquad (3.48)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3.49)$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (3.50)$$

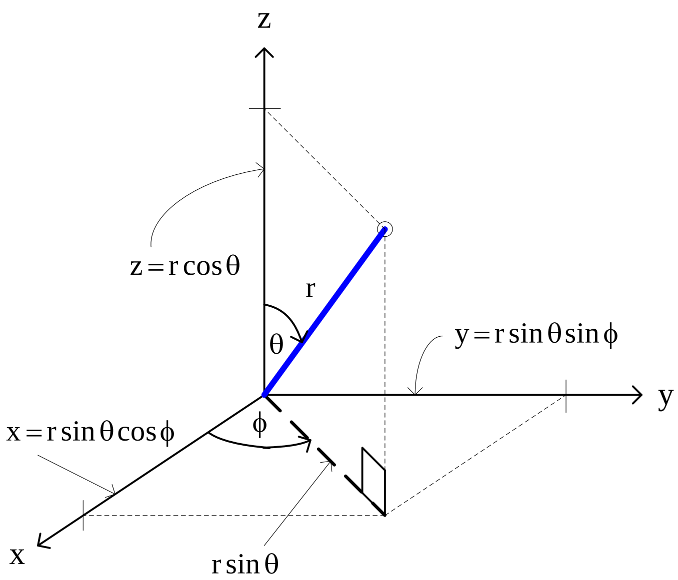
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3.51)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (3.52)$$

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (3.53)$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{3.54}$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.55}$$



รูปที่ 3.2 ตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมและทรงกลม

ตัวอย่างที่ 3.3 จงแปลงเวกเตอร์ $\vec{B} = \frac{xz}{y}\hat{a}_x$ ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลม

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นที่ 1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ (ใช้ข้อมูลจากตารางที่ 3.2)

$$B_r = \vec{B}\cdot\hat{a}_r$$

$$= \frac{xz}{y}\hat{a}_x\cdot\hat{a}_r$$

$$= \frac{xz}{y}(\sin\theta\cos\phi)$$

$$B_\theta = \vec{B}\cdot\hat{a}_\theta$$

$$B_\theta = \frac{xz}{y}\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\theta$$

$$= \frac{xz}{y}(\cos\theta\cos\phi)$$

$$B_\phi = \vec{B}\cdot\hat{a}_\phi$$

$$= \frac{xz}{y}\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi$$

$$= \frac{xz}{y}(-\sin\phi)$$

ขั้นที่ 2 การแปลงตัวแปรด้วยการแทนค่า

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

จะได้

$$B_r = \frac{xz}{y}(\sin\theta\cos\phi)$$

$$B_r = \frac{(r\sin\theta\cos\phi)(r\cos\theta)}{r\sin\theta\sin\phi}(\sin\theta\cos\phi)$$

$$= r\sin\theta\cos\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$B_\theta = \frac{xz}{y}(\cos\theta\cos\phi)$$

$$B_\theta = \frac{(r\sin\theta\cos\phi)(r\cos\theta)}{r\sin\theta\sin\phi}(\cos\theta\cos\phi)$$

$$= r\cos^2\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$B_\phi = \frac{xz}{y}(-\sin\phi)$$

$$B_\phi = -r\cos\theta\cos\phi$$

ดังนั้น

$$\vec{B} = r\sin\theta\cos\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\hat{a}_r + r\cos^2\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\hat{a}_\theta - r\cos\theta\cos\phi\hat{a}_\phi$$

$$= r\cos\theta\cos\phi(\sin\theta\cot\phi\hat{a}_r + \cos\theta\cot\phi\hat{a}_\theta - \hat{a}_\phi)$$

<u>ตอบ</u> $\vec{B} = r\cos\theta\cos\phi(\sin\theta\cot\phi\hat{a}_r + \cos\theta\cot\phi\hat{a}_\theta - \hat{a}_\phi)$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงแปลงเวกเตอร์ $\vec{A} = r\cos\phi\hat{a}_r$ ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

<u>วิธีทำ</u>

ขั้นที่ 1 การแปลงส่วนประกอบสเกลาร์ (ใช้ข้อมูลจากตารางที่ 3.2)

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{a}_x$$

$$= r\cos\phi\hat{a}_r\cdot\hat{a}_x$$

$$= r\sin\theta\cos^2\phi$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\hat{a}_y$$

$$= r\cos\phi\hat{a}_r\cdot\hat{a}_y$$

$$A_y = r\cos\phi\sin\theta\sin\phi$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\hat{a}_z$$

$$= r\cos\phi\hat{a}_r\cdot\hat{a}_z$$

$$= r\cos\phi\cos\theta$$

ขั้นที่ 2 การแปลงตัวแปรด้วยการแทนค่า

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$A_x = r\sin\theta\cos^2\phi$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2+z^2})\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}\right)$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_y = r\cos\phi\sin\theta\sin\phi$$

$$= \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_z = r\cos\phi\cos\theta$$

$$= \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$= \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ดังนั้น

$$\bar{A} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{a}_x + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{a}_y + \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{a}_z$$

$$\bar{A} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z\right)$$

<u>ตอบ</u> $\bar{A} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z\right)$

☺☺☺☺☺

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 3

1. การแปลงระบบพิกัดของเวกเตอร์มีกี่ขั้นตอนอะไรบ้าง
2. กำหนด $\bar{A} = -y\hat{a}_x + x\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ จงหาเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก
3. กำหนด $\bar{A} = \rho\hat{a}_\rho + 3\hat{a}_z$ จงหาเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม
4. กำหนด $\bar{A} = y\hat{a}_x + 5\hat{a}_z$ จงหาเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงกลม
5. กำหนด $\bar{A} = 5\hat{a}_r$ จงหาเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

☺☺☺☺☺