หน่วยที่ 11
คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

11.1 บทนำ

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลากับสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าถูกพัฒนามาจากสมการของแมกซ์แวลล์ที่อธิบายถึงปรากฏการณ์ที่เกิดกับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก และเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยลำดับที่สอง (second – order partial differential equation) ที่อธิบายถึงการแพร่กระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลางหรือในอวกาศว่าง ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการหาสมการคลื่นจากสมการของแมกซ์เวลล์ การวิเคราะห์ลักษณะเบื้องต้นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เช่นทิศทางการแพร่กระจายคลื่น ความเร็วของคลื่น ความยาวคลื่น ความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า การวิเคราะห์หาส่วนประกอบที่เป็นสนามแม่เหล็กจากส่วนประกอบที่เป็นสนามไฟฟ้า และ การวิเคราะห์หาส่วนประกอบที่เป็นสนามไฟฟ้าจากส่วนประกอบที่เป็นสนามแม่เหล็ก

11.2 สมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าบนพื้นฐานสมการแมกซ์เวลล์

สมการของแมกซ์เวลล์ที่เป็นพื้นฐานของสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีดังต่อไปนี้ เมื่อกำหนดตัวกลางเป็นตัวกลางแบบเอกพันธุ์ (homogeneous medium) ซึ่งไม่มีทั้งประจุและสภาพนำไฟฟ้าอยู่ภายในแล้ว

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{11.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{11.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{11.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{11.4}$$

สมการที่ (11.1) เทอมขวามืออธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าตามเวลา เทอมซ้ายมือแสดงเคิร์ลของสนามแม่เหล็ก กล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าตามเวลาจะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กขึ้น ในทำนองเดียวกันสมการที่ (11.2) แสดงให้เห็นว่าสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (เทอมขวามือ) จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าขึ้นได้ (เทอมซ้ายมือ)

เมื่อพิจารณาถึงการเดินทางของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแล้ว จะเห็นว่าถ้าสนามไฟฟ้าที่กำลังเปลี่ยนแปลงตามเวลาทำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาขึ้นได้ และสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นนี้ซึ่งเปลี่ยนแปลงตามเวลาก็จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าขึ้นได้ด้วยเช่นกัน สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะสร้างสนามแม่เหล็กและสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจะสร้างสนามไฟฟ้าขึ้นอีกเป็นทอด ๆ ติดต่อกันไปเรื่อย ๆ เช่นนี้ ซึ่งลักษณะที่เกิดขึ้นจะเป็นการถ่ายเทพลังงานจากสนามไฟฟ้าไปสู่สนามแม่เหล็กและกลับคืนสู่สนามไฟฟ้าอีกสลับกันไปเช่นนี้ไม่มีสิ้นสุด ดังนั้นเมื่อพิจารณาได้ดังนี้แล้วจะเห็นได้ว่าพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางได้นั่นเอง

การดำเนินการหาสมการทางคณิตศาสตร์ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า จะเริ่มที่สมการที่ (11.1) ซึ่งจะขอกล่าวความหมายในเชิงคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเพื่อให้เกิดภาพพจน์ชัดเจนขึ้น สมการนี้แสดงให้เห็นว่าสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจะทำให้เกิดเคิร์ลของสนามแม่เหล็กขึ้น ซึ่งอธิบายความได้ว่า เมื่อสนามไฟฟ้ามีการแปรเปลี่ยนไปตามเวลาแล้ว จะเกิดอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็กเทียบกับระยะทาง (เคิร์ลของสนามแม่เหล็ก) หรือกล่าวได้ว่าสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามระยะทาง และสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นนั้นเปลี่ยนแปลงตามเวลาก็จะก่อให้เกิด

อนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าเทียบกับระยะทาง(เคิร์ลของสนามไฟฟ้า) หรือสนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยน - แปลงตามระยะทาง (สมการที่ (11.2))

จากสมการที่ (11.2) ค่าเคิร์ลทั้งสองข้างของสมการเป็นดังนี้

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{E}) = -\mu\nabla\times\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \qquad (11.5)$$

เนื่องจากลำดับก่อนหลังของการดิฟเฟอเรนชิเอตเพื่อหาอนุพันธ์ย่อยจะไม่เปลี่ยนแปลงผลลัพธ์สุดท้าย ดังนั้นสมการที่ (11.5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\bar{H}) \qquad (11.6)$$

นำค่าเคิร์ลของ $\bar{H}$ จากสมการที่ (11.1) แทนในสมการที่ (11.6) จะได้

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}) = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \qquad (11.7)$$

และจากกฎทางเวกเตอร์แคลคูลัสต่อไปนี้คือ

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} \qquad (11.8)$$

เมื่อนำมาใช้กับสมการที่ (11.7) จะได้

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{E}) - \nabla^2\bar{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \qquad (11.9)$$

และจากสมการที่ (11.4) ที่กล่าวว่า $\nabla\cdot\bar{E} = 0$ จึงทำให้สมการที่ (11.9) เป็นดังนี้

$$\nabla^2\bar{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \qquad (11.10)$$

สมการที่ (11.10) เป็นสมการของคลื่น เมื่อกระจายเวกเตอร์ออกไปในระบบพิกัดฉากจะได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (11.11)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (11.12)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad (11.13)$$

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจจะพิจารณากรณีพิเศษที่ให้ $E_x = 0$ และ $E_z = 0$ และให้ E_y เป็นฟังก์ชั่นของ x แต่ไม่เป็นฟังก์ชั่นของ y หรือ z แล้ว จะได้สมการของคลื่นเป็น

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{11.14}$$

สมการที่ (11.14) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ (Traveling wave) ในรูปแบบที่ง่ายที่สุด โดยสมการนี้มีคำเฉลยคือ

$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \tag{11.15}$$

ส่วนแรกของคำเฉลยคือ $f_1(x - vt)$ เป็นคลื่นที่เดินทางไปตามแกน x ในทิศทางบวก ฟังก์ชั่น f_1 อาจเป็นฟังก์ชั่นใดๆก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบความปั่นป่วนที่ทำให้เกิดคลื่นขึ้นมา เช่นคลื่นวิทยุส่วนใหญ่จะมีรูปร่างโดยประมาณเป็นคลื่นรูปไซน์ ในกรณีนี้ฟังก์ชั่น f_1 อาจเป็นฟังก์ชั่นไซน์หรือฟังก์ชั่นโคไซน์ของ $(x - vt)$ ก็ได้

ส่วนที่สองของคำเฉลยคือ $f_2(x + vt)$ เป็นคลื่นเคลื่อนที่เช่นเดียวกับส่วนแรก แต่เป็นคลื่นที่เดินทางในทิศทางลบตามแนวแกน x ดังนั้นคำเฉลยที่สมบูรณ์จึงเป็นการรวมทั้งสองคลื่นเข้าด้วยกัน โดยคลื่นทั้งสองเดินทางในทิศทางที่สวนทางกัน เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นเพื่อความสะดวกในที่นี้จะให้ $f_2 = 0$

จากสมการที่ (11.15) v เป็นความเร็วของคลื่นโดยมีค่าเป็น

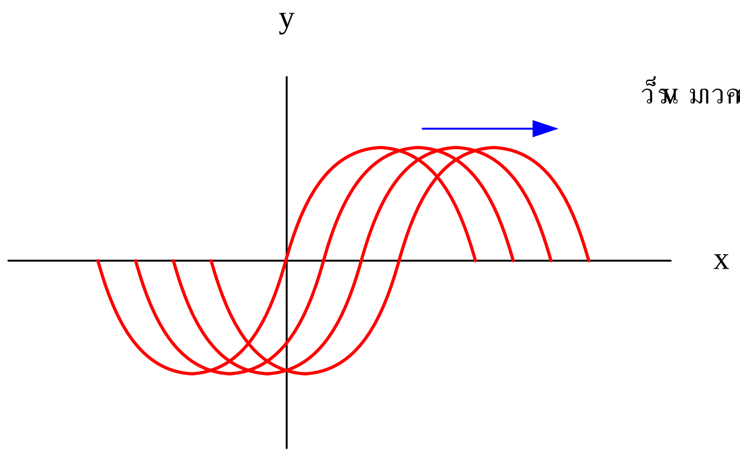
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{11.16}$$

สมการที่ (11.15) อธิบายได้ว่าคลื่นที่เกิดขึ้นเป็นคลื่นตามขวาง (Transverse wave) กล่าวคือคลื่นมีทิศทางตามแกน y แต่เดินทางเคลื่อนที่ไปในทิศทางแกน x ดังแสดงได้ดังรูปที่ 11.1 เมื่อให้ E_y เปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชั่นไซน์

เมื่อคลื่นเดินทางในอวกาศว่าง (free space) ที่มีค่าคงที่ของตัวกลางเป็น μ_0 และ ε_0 จะทำให้ความเร็วของคลื่นเป็น

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{11.17}$$

เมื่อ c คือค่าเฉพาะของความเร็วของคลื่นที่เดินทางในอวกาศว่าง



รูปที่ 11.1 แสดงคลื่นตามขวางที่คลื่นมีทิศทางตามแกน y และเคลื่อนที่ในทิศทาง x

สมการคลื่นดังที่แสดงไว้ในสมการที่ (11.10) เป็นผลมาจากสมการที่ (11.1) และ (11.2) ด้วยการกำจัด $\vec{H}$ และคงค่า $\vec{E}$ ไว้ ถ้าดำเนินการเช่นเดียวกันนี้กับสมการที่ (11.1) และ (11.2) อีกครั้งแต่กำจัด $\vec{E}$ และคงค่า $\vec{H}$ ไว้ จะได้สมการคลื่นสำหรับสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ดังนี้

$$\nabla^2\vec{H} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \tag{11.18}$$

11.3 คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

จากสมการที่ (11.1) และ (11.2) จะเห็นได้ว่าการทำให้เกิดการปั่นป่วนทางไฟฟ้าโดยไม่ให้มีความปั่นปวนทางแม่เหล็กเกิดขึ้นด้วยนั้นย่อมเป็นไปไม่ได้ และในทำนองเดียวกันการทำให้เกิดการปั่นป่วนทางแม่เหล็กโดยไม่ให้มีความปั่นป่วนทางไฟฟ้าเกิดขึ้นด้วยนั้นก็ย่อมเป็นไปไม่ได้เช่นกัน นอกจากนี้แล้วยังพบด้วยว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีส่วนที่เป็นสนามไฟฟ้าและส่วนที่เป็นสนามแม่เหล็กเคลื่อนที่ไปด้วยกันและเป็นคลื่นระนาบ (plane wave) โดยที่ทิศทางของสนามทั้งสองจะตั้งฉากซึ่งกันและกันดังแสดงในรูปที่ 11.2 สนามไฟฟ้ามีส่วนประกอบของสนามในแนวแกน z (E_z) สนามแม่เหล็กมีส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x (H_x) และทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะเป็นไปตามสมการที่ (11.19) ดังนี้

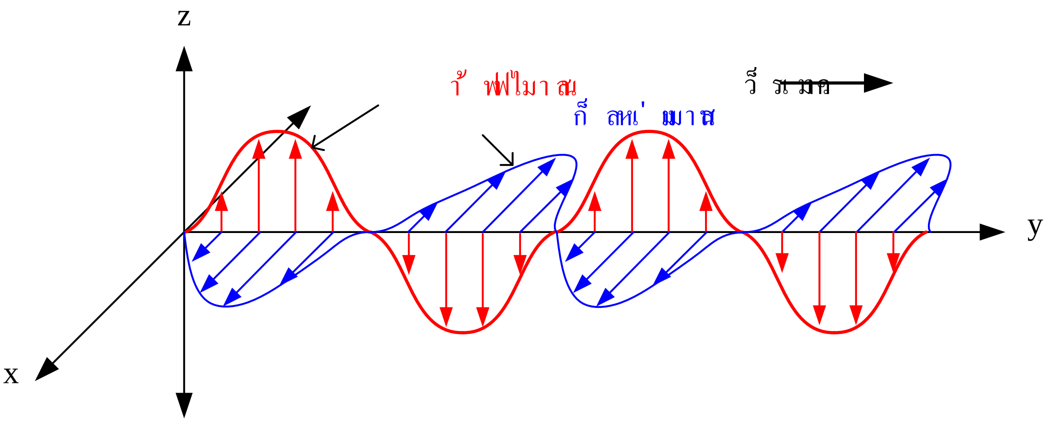
$$\hat{s} = \hat{e}\times\hat{h} \tag{11.19}$$

เมื่อ

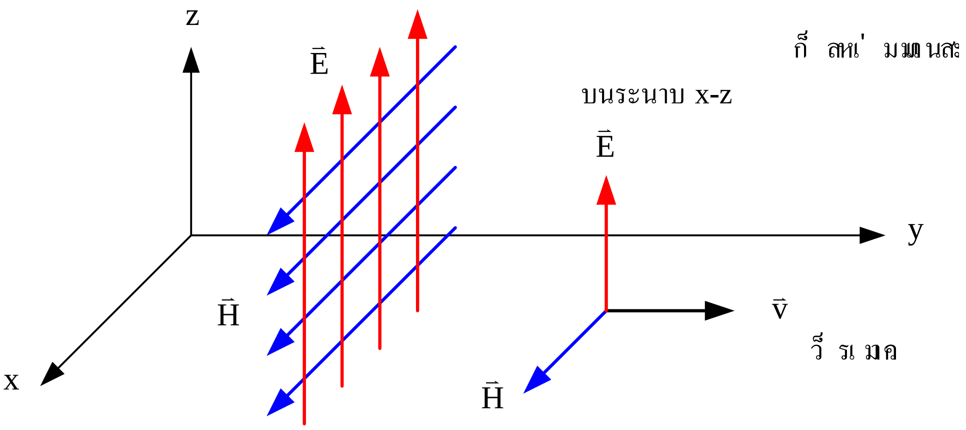
$\hat{s}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่แทนทิศการคลื่นที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

$\hat{e}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแทนทิศทางของสนามไฟฟ้า

$\hat{h}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแทนทิศทางของสนามแม่เหล็ก



รูปที่ 11.2 แสดงรูปคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า



รูปที่ 11.3 แสดงภาคตัดขวางของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปที่ 11.2

รูปที่ 11.3 แสดงภาคตัดขวางของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปที่ 11.2 ซึ่งสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นเฉพาะในแนวแกน z และสนามแม่เหล็กเกิดขึ้นเฉพาะในแนวแกน x นั่นคือระนาบที่เกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้อยู่ในระนาบ x – z และเมื่อพิจารณาจากสมการที่ (11.19) จะได้ว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ จากซ้ายไปขวาตามแกน y

---

ตัวอย่างที่ 11.1 จงหาความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เมื่อคลื่นเดินทางผ่านอวกาศว่าง

วิธีทำ

จากสมการความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศว่าง

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

เมื่อ

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{H/m}$$

ดังนั้น

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(8.854 \times 10^{-12}\right)\left(4\pi \times 10^{-7}\right)}}$$

$$= 3 \times 10^{8} \quad \text{m/s}$$

ตอบ 3×10^{8} m/s

ตัวอย่างที่ 11.2 คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปที่ 11.2 เดินทางในอวกาศว่างด้วยความเร็ว 3×10^{8} m/s คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้เคลื่อนที่ไปในทิศทางใด

วิธีทำ

จากรูปที่ 11.2 สนามไฟฟ้าอยู่ในทิศ $\hat{a}_z$ และสนามแม่เหล็กอยู่ในทิศ $\hat{a}_x$ ดังนั้น

$$\hat{s} = \hat{e} \times \hat{h}$$

$$\hat{s} = \hat{a}_z \times \hat{a}_x$$

$$\hat{s} = \hat{a}_y$$

ตอบ $\hat{a}_y$

จากสมการที่ (11.15) ที่เป็นคำตอบของสมการคลื่นถ้านำมาพิจารณาประกอบกับรูปที่ 11.2 และ รูปที่ 11.3 โดยกำหนดว่าคลื่นที่เกิดขึ้นเป็นคลื่นแบบไซน์โดยประมาณ ดังนั้น สนามไฟฟ้าจะประกอบด้วยส่วนประกอบตามระบบพิกัดฉากดังนี้

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= E_m \cos\beta(y - vt) \end{aligned} \tag{11.20}$$

เมื่อ

E_m คือขนาดแอมพลิจูด (amplitude) ของคลื่น

β คือค่าคงตัวทางเฟส (phase constant) มีหน่วยเป็น เรเดียน/เมตร (rad/m)

ถ้ากำหนดให้ $\beta v = \omega$ จะเขียนสมการที่ (11.20) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= E_m \cos(\omega t - \beta y) \end{aligned} \tag{11.21}$$

โดยที่ $\omega = 2\pi f$ มีหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที (rad/s) และ f เป็นความถี่ของคลื่นมีหน่วยเป็น เฮิรตซ์ (Hz) ถ้าให้ λ เป็นความยาวคลื่นมีหน่วยเป็นเมตร จะได้ความสัมพันธ์ต่างๆ เกิดขึ้นดังนี้

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.22}$$

$$v = \frac{2\pi f}{\beta} \tag{11.23}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{11.24}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.25}$$

สำหรับการดำเนินการกับสนามแม่เหล็กจะเริ่มที่สมการหนึ่งของเมกซ์เวลล์คือ

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \tag{11.26}$$

ถ้ากระจายสมการที่ (11.26) ออกตามพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \tag{11.27}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{11.28}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \qquad (11.29)$$

ดังนั้นจากข้อกำหนดของคลื่นข้างต้น เมื่อสนามไฟฟ้าปรากฏเฉพาะ E_z ส่วนประกอบต่างๆของสมการแมกซ์เวลล์จะเป็น

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad (11.30)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \qquad (11.31)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \qquad (11.32)$$

จากสมการที่ (11.30) เมื่อ $E_z = E_m \cos(\omega t - \beta y)$ จะได้

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\beta E_m \sin(\omega t - \beta y) \qquad (11.33)$$

ส่วนประกอบต่าง ๆ ของสนามแม่เหล็กเป็นปริมาณที่หาได้จากการอินทิเกรตสมการข้างต้นคือ (11.31) (11.32) และ (11.33) ตามลำดับดังนี้

$$B_y = 0$$

$$B_z = 0$$

$$B_x = \frac{\beta}{\omega} E_m \cos(\omega t - \beta y) \qquad (11.34)$$

หรือ

$$B_x = \frac{\beta}{\omega} E_z \qquad (11.35)$$

จากสมการที่ (11.22) จะได้สมการที่ (11.35) กลายเป็น

$$E_z = vB_x \qquad (11.36)$$

สมการที่ (11.36) เป็นความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในคลื่นแม่-เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นคลื่นระนาบอย่างง่ายสรุปได้ดังนี้

1) ส่วนประกอบของคลื่นส่วนที่เป็นสนามไฟฟ้าและส่วนที่เป็นสนามแม่เหล็กจะมีรูปแบบอย่างเดียวกัน

2) ทิศทางของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉากกัน

เนื่องจากความเร็วของคลื่น $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ และ $\bar{B} = \mu\bar{H}$ จะดำเนินการเขียนสมการที่ (11.36) ใหม่ได้ดังนี้

แทนค่า $\bar{B} = \mu\bar{H}$ ซึ่งในที่นี้คือ $B_x = \mu H_x$

$$E_z = v\mu H_x$$

แทนค่า $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$E_z = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}} H_x$$

$$= \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu\varepsilon}} H_x$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_x$$

สมการที่ (11.36) จึงกลายเป็น

$$E_z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_x \qquad (11.37)$$

หรือ

$$E_z = \eta H_x \qquad (11.38)$$

โดยที่

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (11.39)$$

เมื่อ η คือค่าอินทรินสิกอิมพีแดนซ์ (intrinsic impedance) มีหน่วยเป็นโอห์ม

ตัวอย่างที่ 11.3 คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางในอวกาศว่างมีส่วนประกอบที่เป็นสนามไฟฟ้าคือ

$$\bar{E} = 50\cos(10^8 t - \beta x)\hat{a}_y \quad \text{V/m}$$

จงหา

ก) ทิศทางการแพร่กระจายคลื่น

ข) ความถี่ของคลื่น (f)

ค) ความยาวคลื่น (λ)

ง) ค่าคงตัวทางเฟส (β)

จ) ส่วนประกอบที่เป็นสนามแม่เหล็ก

ฉ) ค่าอินทรินสิกอิมพีแดนซ์ η

ก) จงหาทิศทางการแพร่กระจายคลื่น

วิธีทำ

พิจารณาเครื่องหมายลบในเทอม $(10^8 t - \beta x)$ เป็นสิ่งที่ระบุว่าคลื่นเดินทางไปในทิศทางตามแนว $\hat{a}_x$ (แกน x ทิศทางบวก)

ตอบ $\hat{a}_x$

ข) ความถี่ของคลื่น (f)

วิธีทำ

$$\omega = 2\pi f = 10^8 \quad \text{rad/s}$$

$$f = \frac{10^8}{2\pi}$$

$$f = 159.2 \quad \text{MHz}$$

ตอบ 159.2 MHz

ค) ความยาวคลื่น (λ)

วิธีทำ

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

ในที่นี้คลื่นเดินทางในอวกาศว่างซึ่ง $v = c$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$= \frac{3\times10^8}{\frac{10^8}{2\pi}}$$

$$= 6\pi \quad \text{m}$$

ตอบ 6π m

ง) ค่าคงตัวทางเฟส (β)

วิธีทำ

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$$

$$\beta = \frac{10^8}{3\times10^8}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{rad/m}$$

ตอบ $\frac{1}{3}$ rad/m

จ) ส่วนประกอบที่เป็นสนามแม่เหล็ก

วิธีทำ

จากโจทย์กำหนด $\vec{E} = 50\cos(10^8 t - \beta x)\hat{a}_y$

สนามไฟฟ้ามีส่วนประกอบทางแกน y คือ

$$E_y = 50\cos(10^8 t - \beta x)$$

ดังนั้น $\hat{e} = \hat{a}_y$ และคลื่นเดินทางในทิศทาง $\hat{a}_x$ จะได้ $\hat{s} = \hat{a}_x$

จาก

$$\hat{s} = \hat{e}\times\hat{h}$$

$$\hat{a}_x = \hat{a}_y\times\hat{h}$$

ดังนั้น $\hat{h} = \hat{a}_z$ เพื่อให้สมการข้างต้นเป็นจริงคือ

$$\hat{a}_x = \hat{a}_y\times\hat{a}_z$$

เพราะฉะนั้น สนามแม่เหล็กจึงมีทิศทาง $\hat{a}_z$ และ

$$E_y = vB_z$$

ในที่นี้ $v = c$ และ $B_z = \mu_0 H_z$

$$E_y = c\mu_0 H_z$$

หรือ

$$H_z = \frac{E_y}{c\mu_0}$$

$$H_z = \frac{50\cos(10^8 t - \beta x)}{(3\times 10^8)(4\pi\times 10^{-7})}$$

$$\vec{H}_z = \frac{50\cos(10^8 t - \beta x)}{120\pi}$$

ในที่นี้ $\beta = \dfrac{1}{3}$ จะได้

$$\vec{H}_z = 132.63\cos(10^8 t - \frac{x}{3}) \quad \text{mA/m}$$

หรือ

$$\vec{H} = 132.63\cos(10^8 t - \frac{x}{3})\hat{a}_z \quad \text{mA/m}$$

<u>ตอบ</u> $132.63\cos(10^8 t - \dfrac{x}{3})\hat{a}_z$ mA/m

ฉ) ค่าอินทรินสิกอิมพีแดนซ์ η

<u>วิธีทำ</u>

ในอวกาศว่าง $\mu = \mu_0$ และ $\varepsilon = \varepsilon_0$ ดังนั้น

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi\times 10^{-7}}{8.854\times 10^{-12}}}$$

$$= \sqrt{141928}$$

$$= 376.73 \quad \Omega$$

<u>ตอบ</u> 376.73 Ω

ตัวอย่างที่ 11.4 จากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวอย่างที่ 11.3 ที่มีส่วนประกอบสนามไฟฟ้าเป็น $\vec{E} = 50\cos(10^8 t - \beta x)\hat{a}_y$ V/m และ $\beta = \dfrac{1}{3}$ จงหาส่วนประกอบสนามแม่เหล็กโดยการใช้สมการของแมกซ์เวลล์

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการแมกซ์เวลล์และตัวกลางเป็นอวกาศว่าง

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

จะได้

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0}\int(\nabla\times\vec{E})dt$$

คำนวณหา $\nabla\times\vec{E}$ ดังนี้

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$$

แต่ $E_x = E_z = 0$ และ E_y เป็นฟังก์ชั่นของ x ดังนั้น

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x) & 0\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{\partial E_y(x)}{\partial x}\hat{a}_z - \frac{\partial E_y(x)}{\partial z}\hat{a}_x$$

เนื่องจาก E_y เป็นฟังก์ชั่นของ x ดังนั้น

$$\frac{\partial E_y(x)}{\partial z} = 0$$

จะได้

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{\partial E_y(x)}{\partial x}\hat{a}_z$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{\partial(50\cos(10^8 t-\beta x))}{\partial x}\hat{a}_z$$

$$= 50\beta\sin(10^8 t-\beta x)\hat{a}_z$$

แทนค่าลงใน $\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0}\int(\nabla\times\vec{E})dt$

$$\vec{H} = -\hat{a}_z \frac{1}{\mu_0}\int 50\beta \sin(10^8 t - \beta x)\,dt$$

$$\vec{H} = -\hat{a}_z \frac{50\beta}{\mu_0}\int \sin(10^8 t - \beta x)\,dt$$

$$\vec{H} = -\hat{a}_z \frac{50\beta}{\mu_0 10^8}\int \sin(10^8 t - \beta x)\,d(10^8 t - \beta x)$$

$$\vec{H} = \hat{a}_z \frac{50\beta}{\mu_0 10^8}\left(\cos(10^8 t - \beta x)\right)$$

เมื่อ $\beta = \frac{1}{3}$

$$\vec{H} = \hat{a}_z \frac{50}{(3)(4\pi \times 10^{-7})(10^8)}\left(\cos(10^8 t - \beta x)\right)$$

$$\vec{H} = 132.63\cos(10^8 t - \beta x)\,\hat{a}_z \qquad \text{mA/m}$$

<u>**ตอบ**</u> $132.63\cos(10^8 t - \beta x)\,\hat{a}_z$ mA/m

---

☺☺☺☺☺

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 11

1. จงอธิบายลักษณะของคลื่นระนาบ (Plane wave)
2. จงอธิบายลักษณะของคลื่นตามขวาง (Transverse wave)
3. จงอธิบายลักษณะของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
4. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางในอวกาศว่างมีส่วนประกอบที่เป็นสนามแม่เหล็กคือ

$$\vec{H} = 0.5\cos(3\times10^{8}t+\beta x)\hat{a}_y \quad \text{A/m}$$

จงหา

ก) ทิศทางการแพร่กระจายคลื่น

ข) ความถี่ของคลื่น (f)

ค) ความยาวคลื่น (λ)

ง) ค่าคงตัวทางเฟส (β)

จ) ส่วนประกอบที่เป็นสนามไฟฟ้า

ฉ) ค่าอินทรินสิกอิมพีแดนซ์ η โดยคำนวณจากอัตราส่วนระหว่างสนามไฟฟ้ากับสนามแม่เหล็ก

5. จากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในข้อ 4 ที่มีส่วนประกอบสนามแม่เหล็กเป็น

$$\vec{H} = 0.5\cos(3\times10^{8}t+\beta x)\hat{a}_y \quad \text{A/m}$$

จงคำนวณหาส่วนประกอบทางสนามไฟฟ้าโดยใช้สมการของแมกซ์เวลล์

☺☺☺☺☺